HÖGSKOLAN
I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg

Linjär algebra, distans
LINJÄR ALGEBRA, MAG041
Inlämningsuppgift 1
Deadline 20161205

Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Lämnas in via BlackBoard.

1. Beräkna alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 1 \\ -x + 2y + z &= 3 \\ 3x - 5y - 2z &= -8 \end{aligned}$$

2. Är följande tre vektorer linjärt beroende eller linjärt oberoende

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3. Beräkna villkor på

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

som gör att systemet $Ax = b$ är konsistent, där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

4. (a) Beräkna matriserna till följande avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.
   i) Avbildningen R_φ som roterar alla vektorer med vinkeln $\varphi = \pi/3$.
   ii) Avbildningen S_y som speglar alla vektorer i y-axeln.s
   iii) Avbildningen R_θ som roterar alla vektorer med vinkeln $\theta = -\pi/6$
   (b) Genom att multiplicera matriserna ovan beräkna Matrisen för den avbildning som först roterar med θ, sedan speglar med S_y och till sist roterar med φ.
   (c) Spelar det någon roll i vilken ordning matriserna ställs upp?

Svar till tentamen i Linjär Algebra, mag041, Deadline 20161205 .

1.

2.

3.

4.

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra, mag041, Deadline 20161205 .

1. Vi ställer upp systemet på matrisform och utför Gausselimination med återsubstition, så att vi får systemet på reducerad form:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & -2 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Från den reducerade formen ser vi att systemet är konsistent och har många lösningar. De ledande elementen står i kolonn 1 och 2, vilket innebär att x och y är ledande variabler. Tredje kolonnen saknar ledande element vilket betyder att $z = t$ är fri. Vi uttrycker nu de ledande variablerna mha den fria.

Rad 1 ger

$$x = -z - 1 = -t - 1$$

och rad 2 ger

$$y = -z + 1 = -t + 1$$

Eftersom $z = t$ så får vi lösningen på parameterform

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Definitionen av linjärt beroende/oberoende kräver att vi ställer upp systemet

$$r\mathbf{u} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w} = \mathbf{0} \tag{1}$$

vilken ger följande matrissystem som vi radreducerar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ -4 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eftersom reduktionen ger oss ett konsistent system med två ledande variabler och en fri variabel så ska vi förstå att systemet har många lösningar. Detta innebär att vi har icketriviala lösningar till (1) och detta betyder att vektorerna är linjärt beroende enligt definitionen av linjärt beroende.

Alternativ :: Använd Gaussmaskinen

Frågan om beroende/oberoende kan också avgöras genom att ställa upp vektorerna som rader i en matris. Om man får nollrad när man eliminierar denna matris så är de beroende, annars oberoende. Vi får

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektorerna är alltså beroende eftersom vi får nollrad.

3. Ställ upp systemet på utvidgad matrisform och Radreducera.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 1 & -2 & -1 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b \\ 2 & -1 & 1 & a \\ 1 & -2 & -1 & c \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b \\ 0 & -3 & -3 & a - 2b \\ 0 & 0 & 0 & -a + b + c \end{array}\right]$$

Konsistens kräver att $-a + b + c = 0$, vilket blir vårt villkor.

4. (a) En rotation med en allmän vinkel α har matrisen

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

i) Här är $\alpha = \varphi = \pi/3$ (dvs $60°$) vilket ger $\cos\alpha = 1/2$ och $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$ som ger oss matrisen

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ii) För att beräkna speglingen i y-axeln så ser vi vad som händer med standardbasvektorerna: Vi påminner om att vid spegling i y-axeln så är det y-axeln som är speglingslinjen. Alla vektorer på denna axel kommer alltså att vara opåverkade av speglingen. x-axeln däremot kommer att vändas så att den pekar åt motsatt håll. Vi får

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrisen för denna spegling har dessa två resulterande vektorer som kolonner:

$$S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) Här är $\alpha = \theta = -\pi/6$ (dvs -30°) vilket ger $\sin\alpha = -1/2$ och $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$ som ger oss matrisen

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}2 \end{bmatrix}$$

(b) När man kombinerar flera linjära operationer så kommer matrisen för den första stå längst till höger och de övriga till vänster om denna. Matrisen för vår sammansatta avbildning blir därför

$$R_\varphi S_y R_\theta = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Låt oss se vad som händer om vi multiplicerar ihop matriserna i annan ordning

$$\begin{aligned} R_\theta S_y R_\varphi &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ S_y R_\theta R_\varphi &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Här har bara några av möjligheterna ställts upp. Vad man ser är att ordningen i vilken matriserna ställs upp är extremt viktigt. Den rätta ordningen får man genom att ställa upp matriserna från höger till vänster. Den första längst till höger och sedan ställer man upp de övriga till vänster om den första.