

EXEMPELSAMLING :: VEKTORRÄKNING

MIKAEL FORSBERG :: 21 JANUARI 2016

1. Låt $v_1 = (2, -1, 1)$, $v_2 = (3, -6, 11)$, $v_3 = (-5, 6, 2)$ Beräkna följande linjärkombinationer av vektorerna

(a) $v_1 + 3v_2 - v_3$

(b) $2v_2 + 5v_3 - 3v_1$

(c) $-11v_1 + 3v_2 - 7v_3$

2. Bestäm Ortsvektor till punkterna

(a) $P_1 = (1, 2 - 7)$

(b) $P_2 = (-3, 2, 1)$

(c) $P_3 = (-1, 0, 0)$

3. Beräkna längden av vektorerna

(a) $a = (1, 3, -2)$, $b = (2, 1, 1)$ och $c = (-2, 4, -3)$

(b) $a = 7(1, 3, -2)$, $b = \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{3}}(2, 1, 1)$ och $c = \sqrt{3}(-2, 4, -3)$

(c) $a = (2, 4, 6)$, $b = (3, 9, 15)$ och $c = (\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{35}{\sqrt{3}})$

4. Låt $u = (-2, 4, 3)$ och $v = (12, -3, 4)$

(a) Normera vektorerna u och v .

(b) Gör om vektorn u så att den får längden 2

(c) Multiplicera vektorn v med ett tal så att vi får en vektor med längden 10.

(d) Ändra u 's längd så att vi får en vektor som är lika lång som v .

(e) Beräkna den vektor som pekar i riktningen $u + v$ men som har längden 100.

5. Normera följande vektorer

(a) $a = \frac{2}{\sqrt{5}}(-2, 3, 5)$

(b) $b = (\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-6}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}})$

(c) $c = \frac{1}{\sqrt{3}}(2, -4, 10)$

(d) Förklara genom att använda vektorn $d = k \cdot (x, y, z)$ varför vi kan ignorera konstanten $k > 0$ när vi normera. Visa vad som händer med k när vi normerar d utan att strunta i k . Vad händer om $k < 0$

(e) $u = \frac{-2}{\sqrt{11}}(3, 1, -4)$

6. Försök se/visualisera vart man kan nå genom att göra linjärkombinationer av vektorerna u och v .

- (a) $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 2, 0)$
- (b) $u = (0, -1, 2)$, $v = (0, 3, 1)$
- (c) $u = (2, 0, 1)$, $v = (1, 0, -2)$
- (d) $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$
- (e) $u = (2, 1, -2)$, $v = (-2, -1, 2)$

7. Visa att vektorn b kan skrivas som linjärkombination av u och v

- (a) $b = (1, 2, -1)$, $u = (2, 3, 1)$, $v = (3, 4, 3)$
- (b) $b = (-1, 3, -3)$, $u = (1, 2, -1)$, $v = (3, 1, 1)$
- (c) $b = (2, -4, 1)$, $u = (-1, 2, 3)$, $v = (1, -2, 2)$

8. Skärningen mellan två plan blir i regel en linje. För följande system med två plan-ekvationer. Bestäm lösningslinjen på parameterform.

(a)

$$\begin{aligned}x + y - z &= 1 \\2x + y + z &= 4\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}2x + 3y - z &= 1 \\4x - y + 3z &= 3\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}2x - y - z &= 1 \\-2x + y + 3z &= 1\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= -1 \\-2x - 4y + 2z &= 2\end{aligned}$$

EXEMPELSAMLING :: VEKTORRÄKNING

SVAR ::

1.

2. (a) $OP_1 = (1, 2 - 7)$

(b) $OP_2 = (-3, 2, 1)$

(c) $OP_3 = (-1, 0, 0)$

3.

4.

5.

6. (a) $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 2, 0)$ spänner upp xy -planet eftersom de inte är parallella och båda har z -koordinaten noll.

(b) $u = (0, -1, 2)$, $v = (0, 3, 1)$ spänner upp yz -planet ty de är oberoende och x -koordinaten noll.

(c) $u = (2, 0, 1)$, $v = (1, 0, -2)$ Här är det xz -planet som spänns. y är noll.

(d) $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ Här spänns ett plan som är snett upp eftersom vektorerna är oberoende

(e) $u = (2, 1, -2)$, $v = (-2, -1, 2)$ Här har vi två parallella vektorer $u = -v$. De spänner därför upp en linje

7.

8.

EXEMPELSAMLING :: VEKTORRÄKNING

LÖSNINGAR

1. (a)

$$v_1 + 3v_2 - v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -18 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -25 \\ 36 \end{bmatrix}$$

(b)

$$2v_2 + 5v_2 - 3v_3 = 7v_2 - 3v_3 = 7 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ -60 \\ 71 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} -11v_1 + 3v_2 - 7v_3 &= -11 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 22 \\ -11 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -18 \\ 33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 35 \\ -42 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ -71 \\ 30 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Varje punkt definierar en Ortsvektor, som är den vektor som startar i origo och slutar vid punkten. Ortsektorn får därmed samma koordinater som punkten.

3. Vi noterar först att längden $\|v\|$ av en vektor $v = (x, y, z)$ beräknas enligt

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Och om k är ett reellt tal så har vi regeln

$$\|k \cdot v\| = |k| \cdot \|v\|$$

Med detta så får vi:

(a)

$$\begin{aligned} \|a\| &= \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14} \\ \|b\| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6} \\ \|c\| &= \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{29} \end{aligned}$$

(b) Här använder vi räkneregeln och resultatet från uppgift 1:

$$\begin{aligned} \|a\| &= |7| \cdot \|(1, 3, -2)\| = 7\sqrt{14} \\ \|b\| &= \left| \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right| \cdot \|(2, 1, 1)\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \sqrt{6} = \sqrt{5}\sqrt{2}, \\ \|c\| &= |\sqrt{3}| \cdot \|(-2, 4, 3)\| = \sqrt{3}\sqrt{29} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\|a\| &= \|2(1, 2, 3)\| = 2 \cdot \|(1, 2, 3)\| = 2\sqrt{14} \\ \|b\| &= \|3 \cdot (1, 3, 5)\| = 3 \cdot \|(1, 3, 5)\| = 3 \cdot \sqrt{35} \\ \|c\| &= \left\| \frac{5}{\sqrt{3}}(1, 2, 7) \right\| = \frac{5}{\sqrt{3}}\sqrt{54} = 5\sqrt{3}\sqrt{6} = 5\sqrt{18}\end{aligned}$$

4. (a) Normerar vi u och v och då får vi enhetsvektorerna

$$e_u = \frac{u}{\|u\|} = \frac{(-2, 4, 3)}{\sqrt{29}}, \quad e_v = \frac{v}{\|v\|} = \frac{(12, -3, 4)}{\sqrt{169}} = \frac{(12, -3, 4)}{13}$$

(b) Eftersom e_u pekar i u 's riktning så är $2 \cdot e_u = \frac{(24, -6, 8)}{13}$ den vektor med längden 2 som vi söker(c) Multiplicerar vi enhetsvektorn e_v med 10 så får vi den vektor vi söker: $10e_v = \frac{10}{13}(12, -3, 4)$. Vår multippel är alltså $\frac{10}{13}$.(d) v 's längd är ju 13 så multiplicerar vi enhetsvektorn e_u med 13 så får vi den vektor vi söker: $\frac{13}{\sqrt{29}}(-2, 4, 3)$.(e) Vi har att $u + v = (10, 1, 7)$ vilket ger att dess längd är $\sqrt{150}$. Dividerar vi $u + v$ med dess längd får vi en vektor med längden 1 och nu behöver vi bara multiplicera med 100 för att få den vektor vi söker:

$$\frac{100}{\sqrt{150}}(10, 1, 7)$$

5. (a) Vi kan här ignorera den positiva konstanten framför vektorn. När man normerar så kommer den med i både täljare och nämnare och tar därför ut sig. Genom att strunta i konstanten blir räkningen snabbare men framförallt enklare. Normeringen blir nu

$$e_a = \frac{a}{\|a\|} = \frac{(-2, 3, 5)}{\sqrt{38}}$$

(b) Här är det lämpligt att bryta ut konstanten $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (och sedan strunta i den, vilket vi kan göra eftersom den är positiv...)

$$e_b = \frac{b}{\|b\|} = \frac{(-1, -2, 3)}{\sqrt{14}}$$

(c) I vektorn c så har vi en gemensam två i de tre komponenterna. Vi bryter först ut denna två och slår ihop den med konstanten som står framför. Detta ger en ny konstant framför (som vi kan ignorera när vi normerar).

$$e_c = \frac{c}{\|c\|} = \frac{(1, -2, 5)}{\sqrt{30}}$$

(d) Låt oss normera d :

$$e_d = \frac{d}{\|d\|} = \frac{k \cdot (x, y, z)}{\|k \cdot (x, y, z)\|} = \frac{k(x, y, z)}{|k|\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{k}{|k|} \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \operatorname{sgn}(k) \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Vi påminner om att

$$\frac{k}{|k|} = \operatorname{sgn} k = \begin{cases} 1 & \text{om } k > 0 \\ 0 & \text{om } k = 0 \\ -1 & \text{om } k < 0 \end{cases}$$

Detta visar att om $k > 0$ så har k ingen betydelse vid normering och om $k < 0$ så måste vi ta med tecknet. Om $k = 0$ så har vi nollvektorn som har längden noll och kan inte normeras (eftersom vi då får en nolldivision...)

- (e) Framför vektorn $(3, 1, -4)$ har vi konstanten $-\frac{2}{\sqrt{11}}$. Om vi behåller minustecknet så kan vi ignorera resten av konstanten när vi normerar

$$e_u = \frac{u}{\|u\|} = -\frac{(3, 1, -4)}{\sqrt{26}} = \frac{(-3, -1, 4)}{\sqrt{26}}$$

6. (a) $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 2, 0)$ spänner upp xy -planet eftersom de inte är parallella och båda har z -koordinaten noll.
- (b) $u = (0, -1, 2)$, $v = (0, 3, 1)$ spänner upp yz -planet ty de är oberoende och x -koordinaten noll.
- (c) $u = (2, 0, 1)$, $v = (1, 0, -2)$ Här är det xz -planet som spänns. y är noll.
- (d) $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ Här spänns ett plan som är snett upp eftersom vektorerna är oberoende
- (e) $u = (2, 1, -2)$, $v = (-2, -1, 2)$ Här har vi två parallella vektorer $u = -v$. De spänner därför upp en linje

7. Om b är en linjärkombination av u och v så gäller att ekvationen

$$xu + yv = b$$

har lösningar.

- (a) I detta fall får vi ekvationssystemet

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Detta kan vi skriva om som

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 4y &= 2 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

Eller på matrisform

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Matrissystemet har radreducerats och det resulterande systemet ger oss $x = 2$ och $y = -1$.

(b) På matrisform så blir systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vilket ger att $x = 2$ och $y = -1$

(c) På matrisform så blir systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Vilket ger att $x = -\frac{3}{5}$ och $y = \frac{7}{5}$

8. (a) Multiplicerar vi första ekvationen med -2 och adderar till andra ekvationen så får vi

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

På matrisform har vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right]$$

Vi får att z är fri variabel, dvs $z = t$ blir vår parameter och löser vi ut först y så får vi $y = 3t - 2$ och sedan x : $x = -y + z + 1 = -2t + 3$ Vi kan nu skriva lösningarna på vektorform som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta är skärningslinjen skriven på parameterform.

(b) Här kan vi multiplicera första ekvationen med -2 och addera till den andra för att eliminera x . Vi får då

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ -7y + z &= 1 \end{aligned}$$

På matrisform har vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Vi får att z är fri (ledande element saknas i z -kolonnen) och $z = t$ blir således vår parameter. Ekvation 2/rad 2 ger att $y = \frac{t}{7} - \frac{1}{7}$. Ekvation 1/rad 1 ger oss att

$$\begin{aligned} 2x &= -3y + z + 1 = -3\left(\frac{t}{7} - \frac{1}{7}\right) + t + 1 = \\ &= \frac{-3}{7}t + \frac{3}{7} + \frac{7}{7}t + \frac{7}{7} = \frac{4}{7}t + \frac{10}{7}. \\ \Rightarrow x &= \frac{2}{7}t + \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Vi sammanställer vårt resultat på vektorform:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \frac{t}{7} + \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) Adderar vi ekvation 1 till ekvation 2 så får vi

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 1 \\ 2z &= 2 \end{aligned}$$

Här blir $z = 1$ så z är inte fri. I detta fall så är $y = t$ vår fria variabel. Från matrisformen har vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

Från denna matris så ser vi att vi har ledande element i första och tredje kolonnen. Andra kolonnen som svarar mot y -variabeln saknar ledande element och därför är $y = t$ vår fria variabel. Vi använder nu ekvationerna för att uttrycka x mha den fria. (Vi har ju att $z = 1$ så denna behöver vi inte bry oss om nu) Från rad 1/ekvation 1 har vi nu

$$2x = y + z + 1 = t + 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t}{2} + 1$$

På vektorform har vi nu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) Här tar vi -2 gånger första ekvationen och adderar till den andra och får då

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= -1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vad betyder nu detta? Geometriskt betyder det att den andra ekvationen definierar exakt samma plan som den första. Multiplikationen med -2 avslöjar att den ena ekvationen är en multipel av den andra och då bidrar den andra ekvationen ingenting för att bestämma lösningarna. Lösningarna till systemet blir alltså alla punkter i det första planet. Hela planet är alltså lösning.

Systemet har bara ett ledande element som står i första kolonnen i det eliminerade systemets matris. Detta betyder att de två övriga variablerna är fria och definierar därför var sin parameter: $y = s$ och $z = t$. Uttrycker vi x mha dessa parameter via första ekvationen får vi

$$x = -2y + z + 1 = -2s + t + 1$$

Lösningarna på vektorform blir nu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$