Exempelsamling :: Vektorräkning

Mikael Forsberg :: 21 januari 2016

1. Låt $v_1 = (2, -1, 1)$, $v_2 = (3, -6, 11)$, $v_3 = (-5, 6, 2)$ Beräkna följande linjärkombinationer av vektorerna
   (a) $v_1 + 3v_2 - v_3$
   (b) $2v_2 + 5v_2 - 3v_3$
   (c) $-11v_1 + 3v_2 - 7v_3$

2. Bestäm ortsvektor till punkterna
   (a) $P_1 = (1, 2 - 7)$
   (b) $P_2 = (-3, 2, 1)$
   (c) $P_3 = (-1, 0, 0)$

3. Beräkna längden av vektorerna
   (a) $a = (1, 3, -2)$, $b = (2, 1, 1)$ och $c = (-2, 4, -3)$
   (b) $a = 7(1, 3, -2)$, $b = \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{3}}(2, 1, 1)$ och $c = \sqrt{3}(-2, 4, -3)$
   (c) $a = (2, 4, 6)$, $b = (3, 9, 15)$ och $c = (\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{10}{\sqrt{3}}, \frac{35}{\sqrt{3}})$

4. Låt $u = (-2, 4, 3)$ och $v = (12, -3, 4)$
   (a) Normera vektorerna u och v.
   (b) Gör om vektorn u så att den får längden 2
   (c) Multiplicera vektorn v med ett tal så att vi får en vektor med längden 10.
   (d) Ändra u's längd så att vi får en vektor som är lika lång som v.
   (e) Beräkna den vektor som pekar i riktningen $u + v$ men som har längden 100.

5. Normera följande vektorer
   (a) $a = \frac{2}{\sqrt{5}}(-2, 3, 5)$
   (b) $b = (\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-6}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}})$
   (c) $c = \frac{1}{\sqrt{3}}(2, -4, 10)$
   (d) Förklara genom att använda vektorn $d = k \cdot (x, y, z)$ varför vi kan ignorera konstanten $k > 0$ när vi normera. Visa vad som händer med k när vi normerar d utan att strunta i k. Vad händer om $k < 0$
   (e) $u = \frac{-2}{\sqrt{11}}(3, 1, -4)$

6. Försök se/visualisera vart man kan nå genom att göra linjärkombinationer av vektorerna u och v.

(a) $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 2, 0)$
(b) $u = (0, -1, 2)$, $v = (0, 3, 1)$
(c) $u = (2, 0, 1)$, $v = (1, 0, -2)$
(d) $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$
(e) $u = (2, 1, -2)$, $v = (-2, -1, 2)$

7. Visa att vektorn b kan skrivas som linjärkombination av u och v

(a) $b = (1, 2, -1)$, $u = (2, 3, 1)$, $v = (3, 4, 3)$
(b) $b = (-1, 3, -3)$, $u = (1, 2, -1)$, $v = (3, 1, 1)$
(c) $b = (2, -4, 1)$, $u = (-1, 2, 3)$, $v = (1, -2, 2)$

8. Skärningen mellan två plan blir i regel en linje. För följande system med två plan-ekvationer. Bestäm lösningslinjen på parameterform.

(a)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ 4x - y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 1 \\ -2x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= -1 \\ -2x - 4y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

Exempelsamling :: Vektorräkning

Svar ::

1.

2. (a) $OP_1 = (1, 2 - 7)$
   (b) $OP_2 = (-3, 2, 1)$
   (c) $OP_3 = (-1, 0, 0)$

3.

4.

5.

6. (a) $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 2, 0)$ spänner upp xy-planet eftersom de inte är parallella och båda har z-koordinaten noll.
   (b) $u = (0, -1, 2)$, $v = (0, 3, 1)$ spänner upp yz-planet ty de är oberoende och x-koordinaten noll.
   (c) $u = (2, 0, 1)$, $v = (1, 0, -2)$ Här är det xz-planet som spänns. y är noll.
   (d) $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ Här spänns ett plan som är snett upp eftersom vektorerna är oberoende
   (e) $u = (2, 1, -2)$, $v = (-2, -1, 2)$ Här har vi två parallella vektorer $u = -v$. De spänner därför upp en linje

7.

8.

Exempelsamling :: Vektorräkning

Lösningar

1. (a)

$$v_1+3v_2-v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -18 \\ 33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -25 \\ 36 \end{bmatrix}$$

(b)

$$2v_2 + 5v_2 - 3v_3 = 7v_2 - 3v_3 = 7\cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ -60 \\ 71 \end{bmatrix}$$

(c)

$$-11v_1 + 3v_2 - 7v_3 = -11 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 22 \\ -11 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -18 \\ 33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 35 \\ -42 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ -71 \\ 30 \end{bmatrix}$$

2. Varje punkt definierar en ortsvektor, som är den vektor som startar i origo och slutar vid punkten. Ortsektorn får därmed samma koordinater som punkten.

3. Vi noterar först att längden $||v||$ av en vektor $v = (x, y, z)$ beräknas enligt

$$||v|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Och om k är ett reellt tal så har vi regeln

$$||k \cdot v|| = |k| \cdot ||v||$$

Med detta så får vi:

(a)

$$||a|| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$
$$||b|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$
$$||c|| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$$

(b) Här använder vi räkneregeln och resultatet från uppgift 1:

$$||a|| = |7| \cdot ||(1, 3, -2)|| = 7\sqrt{14}$$
$$||b|| = \left|\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right| \cdot ||(2, 1, 1) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\sqrt{6} = \sqrt{5}\sqrt{2},$$
$$||c|| = |\sqrt{3}| \cdot ||(-2, 4, 3)|| = \sqrt{3}\sqrt{29}$$

(c)

$$||a|| = ||2(1,2,3)|| = 2 \cdot ||(1,2,3)|| = 2\sqrt{14}$$
$$||b|| = ||3 \cdot (1,3,5)|| = 3 \cdot ||(1,3,5)|| = 3 \cdot \sqrt{35}$$
$$||c|| = ||\frac{5}{\sqrt{3}}(1,2,7)|| = \frac{5}{\sqrt{3}}\sqrt{54} = 5\sqrt{3}\sqrt{6} = 5\sqrt{18}$$

4. (a) Normerar vi u och v och då får vi enhetsvektorerna

$$e_u = \frac{u}{||u||} = \frac{(-2,4,3)}{\sqrt{29}}, \qquad e_v = \frac{v}{||v||} = \frac{(12,-3,4)}{\sqrt{169}} = \frac{(12,-3,4)}{13}$$

(b) Eftersom e_u pekar i u's riktning så är $2 \cdot e_u = \frac{(24,-6,8)}{13}$ den vektor med längden 2 som vi söker

(c) Multiplicerar vi enhetsvektorn e_v med 10 så får vi den vektor vi söker: $10e_v = \frac{10}{13}(12,-3,4)$. Vår multippel är alltså $\frac{10}{13}$.

(d) v's längd är ju 13 så multiplicerar vi enhetsvektorn e_u med 13 så får vi den vektor vi söker: $\frac{13}{\sqrt{29}}(-2,4,3)$.

(e) Vi har att $u+v = (10,1,7)$ vilket ger att dess längd är $\sqrt{150}$. Dividerar vi $u+v$ med dess längd får vi en vektor med längden 1 och nu behöver vi bara multiplicera med 100 för att få den vektor vi söker:

$$\frac{100}{\sqrt{150}}(10,1,7)$$

.

5. (a) Vi kan här ignorera den positiva konstanten framför vektorn. När man normerar så kommer den med i både täljare och nämnare och tar därför ut sig. Genom att strunta i konstanten blir räkningen snabbare men framförallt enklare. Normeringen blir nu

$$e_a = \frac{a}{||a||} = \frac{(-2,3,5)}{\sqrt{38}}$$

(b) Här är det lämpligt att bryta ut konstanten $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (och sedan strunta i den, vilket vi kan göra eftersom den är positiv...)

$$e_b = \frac{b}{||b||} = \frac{(-1,-2,3)}{\sqrt{14}}$$

(c) I vektorn c så har vi en gemensam två i de tre komponenterna. Vi bryter först ut denna två och slår ihop den med konstanten som står framför. Detta ger en ny konstant framför (som vi kan ignorera när vi normerar).

$$e_c = \frac{c}{||c||} = \frac{(1,-2,5)}{\sqrt{30}}$$

(d) Låt oss normera d:

$$e_d = \frac{d}{||d||} = \frac{k \cdot (x,y,z)}{||k \cdot (x,y,z)||} = \frac{k(x,y,z)}{|k|\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{k}{|k|}\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \operatorname{sgn}(k)\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Vi påminner om att

$$\frac{k}{|k|} = \operatorname{sgn} k = \begin{cases} 1 & \text{om }, k > 0 \\ 0 & \text{om }, k = 0 \\ -1 & \text{om }, k < 0 \end{cases}$$

Detta visar att om $k > 0$ så har k ingen betydelse vid normering och om $k < 0$ så måste vi ta med tecknet. Om $k = 0$ så har vi nollvektorn som har längden noll och kan inte normeras (eftersom vi då får en nolldivision...)

(e) Framför vektorn $(3, 1, -4)$ har vi konstanten $-\frac{2}{\sqrt{11}}$. Om vi behåller minustecknet så kan vi ignorera resten av konstanten när vi normerar

$$e_u = \frac{u}{||u||} = -\frac{(3, 1, -4)}{\sqrt{26}} = \frac{(-3, -1, 4)}{\sqrt{26}}$$

6. (a) $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 2, 0)$ spänner upp xy-planet eftersom de inte är parallella och båda har z-koordinaten noll.

(b) $u = (0, -1, 2)$, $v = (0, 3, 1)$ spänner upp yz-planet ty de är oberoende och x-koordinaten noll.

(c) $u = (2, 0, 1)$, $v = (1, 0, -2)$ Här är det xz-planet som spänns. y är noll.

(d) $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ Här spänns ett plan som är snett upp eftersom vektorerna är oberoende

(e) $u = (2, 1, -2)$, $v = (-2, -1, 2)$ Här har vi två parallella vektorer $u = -v$. De spänner därför upp en linje

7. Om b är en linjärkombination av u och v så gäller att ekvationen

$$xu + yv = b$$

har lösningar.

(a) I detta fall får vi ekvationssystemet

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Detta kan vi skriva om som

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 4y &= 2 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

Eller på matrisform

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrissystemet har radreducerats och det resulterande systemet ger oss $x = 2$ och $y = -1$.

(b) På matrisform så blir systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vilket ger att $x = 2$ och $y = -1$

(c) På matrisform så blir systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vilket ger att $x = -\frac{3}{5}$ och $y = \frac{7}{5}$

8. (a) Multiplicerar vi första ekvationen med -2 och adderar till andra ekvationen så får vi

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

På matrisform har vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Vi får att z är fri variabel, dvs $z = t$ blir vår parameter och löser vi ut först y så får vi $y = 3t - 2$ och sedan x: $x = -y + z + 1 = -2t + 3$ Vi kan nu skriva lösningarna på vektorform som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta är skärningslinjen skriven på parameterform.

(b) Här kan vi multiplicera första ekvationen med -2 och addera till den andra för att eliminera x. Vi får då

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ -7y + z &= 1 \end{aligned}$$

På matrisform har vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Vi får att z är fri (ledande element saknas i z-kolonnen) och $z = t$ blir således vår parameter. Ekvation 2/rad 2 ger att $y = \frac{t}{7} - \frac{1}{7}$. Ekvation 1/rad 1 ger oss att

$$\begin{aligned} 2x &= -3y + z + 1 = -3(\frac{t}{7} - \frac{1}{7}) + t + 1 = \\ &= \frac{-3}{7}t + \frac{3}{7} + \frac{7}{7}t + \frac{7}{7} = \frac{4}{7}t + \frac{10}{7}. \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{2}{7}t + \frac{5}{7} \end{aligned}$$

Knep som kan förenkla:: eftersom parametern är viss mån godtycklig så skulle man kunnat välja parametern $t = 7s$. Med denna skulle man bli av med en del av sjundedelarna/fjortondelarna, prova!

Vi sammanställer vårt resultat på vektorform:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \frac{t}{7} + \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) Adderar vi ekvation1 till ekvation 2 så får vi

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 1 \\ 2z &= 2 \end{aligned}$$

Här blir $z = 1$ så z är inte fri. I detta fall så är $y = t$ vår fria variabel. Från matrisformen har vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Från denna matris så ser vi att vi har ledande element i första och tredje kolonnen. Andra kolonnen som svarar mot y-variabeln saknar ledande element och därför är $y = t$ vår fria variabel. Vi använder nu ekvationerna för att uttrycka x mha den fria. (Vi har ju att $z = 1$ så denna behöver vi inte bry oss om nu) Från rad 1/ekvation 1 har vi nu

$$2x = y + z + 1 = t + 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t}{2} + 1$$

På vektorform har vi nu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) Här tar vi -2 gånger första ekvationen och adderar till den andra och får då

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= -1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vad betyder nu detta? Geometriskt betyder det att den andra ekvationen definierar exakt samma plan som den första. Multiplikationen med -2 avslöjar att den ena ekvationen är en multippel av den andra och då bidrar den andra ekvationen ingenting för att bestämma lösningarna. Lösnignarna till systemet blir alltså alla punkter i det första planet. Hela planet är alltså lösning.

Systemet har bara ett ledande element som står i första kolonnen i det eliminerade systemets matris. Detta betyder att de två övriga variablerna är fria och definierar därför var sin parameter: $y = s$ och $z = t$. Uttrycker vi x mha dessa parameter via första ekvationen får vi

$$x = -2y + z + 1 = -2s + t + 1$$

Lösningarna på vektorform blir nu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$