Att beräkna:: Avstånd Version 1.01

Mikael Forsberg :: 30 november 2015

Innehåll

1 Punkter, linjer och plan, en sammanställning

Här sammanställer vi de objekt som vi ska arbeta med

1.1 Punkter i två och tre dimensioner

Vi förutsätter att vi befinner oss i ett flerdimensionellt rum, typiskt $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. En punkt i rummet beskrivs mha dess koordinater m.a.p koordinataxlarna.
Eftersom $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, dvs det tvådimensionella rummet består av alla reella talpar, så säger vi att en punkt reprenteras av ett sådant talpar (x, y).
Det tredimensionella rummet är på samma sätt samlingen av alla taltripplar:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Exempel 1.1. Origo är en speciell punkt, i $\mathbb{R}^2$ representerad av talparet $(0, 0)$ och i$_{\text{ex:origo}}$ $\mathbb{R}^3$ av taltrippeln $(0, 0, 0)$.

■

1.2 Räta linjer i två och tre dimensioner

En rät linje på parameterform ges av

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{p}$$

där $\mathbf{v}$ är linjens riktningsvektor och $\mathbf{p}$ är den punkt vi är i då $t = 0$. Denna beskrivning fungerar i alla dimensioner. Ett exempel på en linje i tre dimensioner ges av

Exempel 1.2. Om vi låter $\mathbf{p} = (1, 0, -3)$ och $\mathbf{v} = (2, -3, -1)$ så är följande en linje i$_{\text{ex:parameterLine}}$ tre dimensioner

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

1.3 Plan i tre dimensioner

Ett plan i tre dimensioner definieras av ekvationen

$$ax + by + cz = d, \qquad \text{normalvektorn ges av} \qquad n = (a, b, c)$$

Ett plan i tre dimensioner kan också skrivas på parameterform

$$\Pi(s, t) = \mathbf{u}s + \mathbf{v}t + \mathbf{p}$$

Ekvationen för ett plan ger oss parameterformen genom att, t.ex. sätta $y = a \cdot s$ och $z = a \cdot t$. Man får då att $x = -y/a - z/a + d/a = -s - t + d/a$, vilket ger oss

$$\Pi(s, t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Avståndsberäkning

2.1 Skalärprodukt och projektion

Kommer ni ihåg skalärprodukten och hur den beräknas:

$$(a_1, a_2, a_3) \bullet (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Den ger också upphov till ett längd och vinkelbegrepp genom

$$u \bullet v = ||u||||v|| \cos \phi,$$

där ϕ är vinkeln mellan vektorerna.
Projektionen av en vektor i riktningen av en annan vektor ges av

$$\mathbf{proj}_v u = \frac{u \bullet v}{||v||^2} v$$

2.2 Avstånd mellan punkter

Avstånd från origo till en viss punkt (a, b) ges av normen

$$||(a, b)|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

För en punkt i det tredimensionella rummet har vi

$$[|(a, b, c) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Avstånd från origo till viss punkt är samma sak som längden av den ortsvektor som pekar ut punkten. Avståndet mellan två punkter ges som längden av skillnadsvektorn mellan punkterna.
Om $p_1 = (a, b, c)$ och $q = (d, e, f)$ så är avståndet mellan punkterna

$$||p - q|| = ||(a - d, b - e, c - f)|| = \sqrt{(a - d)^2 + (b - e)^2 + (c - f)^2}$$

Exempel 2.1. Avståndet från punkten $p = (1, -2, 1)$ till punkten $q = (2, -1, -1)$ är ex:dist-pt2pt

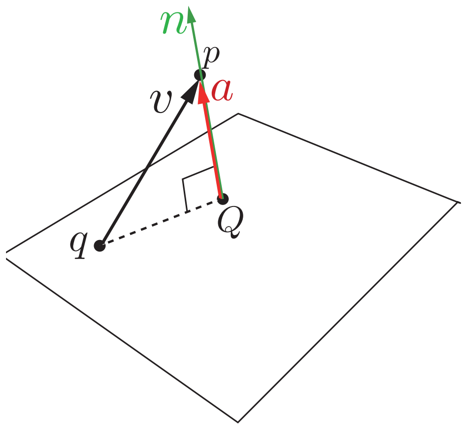
$$||p - q|| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-2 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$$

■

2.3 Avstånd mellan punkt och plan

Vi illustrerar idén mha följande exempel

Exempel 2.2. Beräkna avståndet mellan punkten $p = (1, -2, 2)$ och planet $2x + y -$ ex:dist-pt2pl $3z = 2$



Figur 1: *Avstånd från punkten p till planet ges av projektionen av skillnadsvektorn v på planets normalvektor.*

Idén är att skillnadsvektorn mellan punkten och planets närmsta punkt Q är vinkelrät mot planet och att denna vektor därför är parallell med planets normalvektor. Nu känner vi ju inte till den närmsta punkten Q men vi kan ta vilken annan punkt q som helst i planet och bilda en skillnadsvektor mellan p och q. Detta visas i figur 1

Nu behöver vi omsätta idén till praktisk handling.

Beräkna normalvektorn :: Normalvektorn får vi direkt från planets ekvation

$$n = (2, 1, -3)$$

Beräkna punkt i planet :: Innan vi kan beräkna en skillnadsvektor mellan punkten och planet så behöver vi en punkt i planet. En sådan får vi om vi bestämmer x, y och z så att planets ekvation blir uppfyllt. Det är inte svårt att se att $q = (1, 0, 0)$ ligger i planet:

$$q = (1, 0, 0)$$

Beräkna skillnadsvektor ::

$$v = p - q = (1, -2, 2) - (1, 0, 0) = (0, -2, 2)$$

Projicera skillnadsvektorn på normalvektorn ::

$$a = \mathbf{proj}_n v = \frac{v \bullet n}{||n||^2} n = \frac{-8}{14}(2, 1, -3)$$

Längden av projektionen är vårt avstånd ::

$$||a|| = |\frac{v \bullet n}{||n||}| = \frac{|-8|}{\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

■

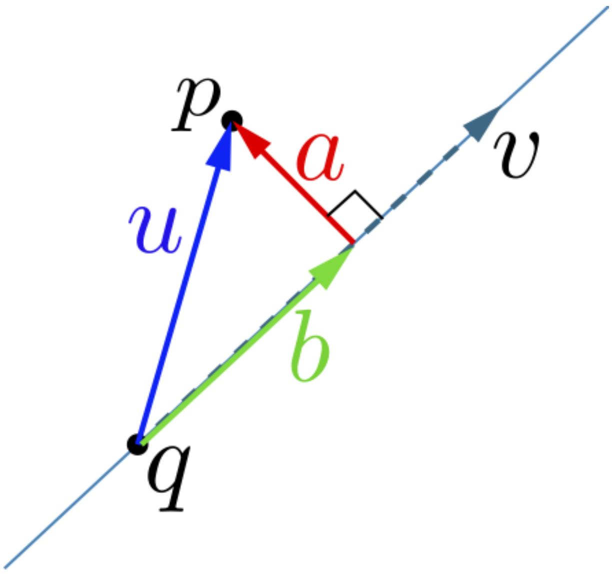
2.4 Avstånd mellan punkt och linje

Med hjälp av följande exempel visas hur man beräknar avstånd mellan en punkt och en linje skriven på parameterform

Exempel 2.3. Beräkna avståndet från punkten $p = (-1, 1, -2)$ till linjen ex:dist-punktLinje

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se figur 2



Figur 2: *Idé om hur man beräknar avståndet från en punkt till en linje. Projicera skilnadsvektorn u på linjens riktningsvektor v. Subtrahera denna projektion b från u så att vi får a. Längden av a är vårt avstånd.*

Figurtexten ger oss vår aktionsplan:

Beräkna skillnadsvektor mellan p och linjen :: Vi tar punkten $q = (1, 3, 1)$ som ligger på linjen. Skillnadsvektorn u blir då

$$u = p - q = (-1, 1, -2) - (1, 3, 1) = (-2, -2, -3) = -(2, 2, 3)$$

Projicera u på linjens riktningsvektor ::

$$b = \mathbf{proj}_v u = \frac{u \bullet v}{||v||^2} v = \frac{-1}{6}(1, -2, 1)$$

Subtrahera från u för att få a ::

$$a = u - b = -(2, 2, 3) - (-\frac{1}{6}(1, -2, 1)) = -\frac{1}{6}((12, 12, 18) - (1, -2, 1)) = \frac{1}{6}(11, 14, 17)$$

Avståndet är längden på a ::

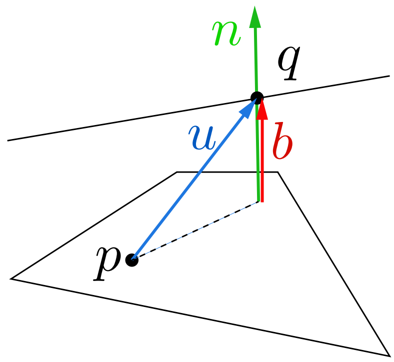
$$d = ||a|| = \frac{1}{6}\sqrt{11^2 + 14^2 + 17^2} = \frac{\sqrt{606}}{6} = \sqrt{\frac{101}{6}}$$

$\blacksquare$

2.5 Avstånd mellan linje och plan

För att en linje och ett plan ska ligga ett positivt avstånd från varandra så måste linjen vara parallell med planet, vilket inträffar precis då linjens riktningsvektor är vinkelrät mot planets normalvektor. Om detta inte är uppfyllt så kommer linjen att skära planet och avståndet blir noll. Vi tittar på följande exempel:

Exempel 2.4. Beräkna avståndet från linjen ex:distLn2Plan



Figur 3: *Avståndet från linjen till planet är längden av den röda vektorn a. Denna vektor får man som projektionen av vektorn u på planets normalvektor n. Skillnadsvektorn u beräknas som skillnadsvektorn mellan en punkt q på linjen till en punkt p i planet.*

$$L(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

till planet $2x - 3y + z = 2$. Situationen är som i figur 3.

Vi utför lösningsplanen ::

$\boxed{\text{Beräkna punkt i planet ::}}$

En punkt i planet uppfyller planets ekvation. Den enklaste punkten blir $p = (1, 0, 0)$.

$\boxed{\text{Beräkna skillnadsvektor mellan planet och linjen ::}}$

Punkten p i planet och punkten $q = (1, 1, 1)$ på linjen ger oss skillandsvektorn

$$u = q - p = (1, 1, 1) - (1, 0, 0) = (0, 1, 1)$$

$\boxed{\text{Projicera på normalvektorn ::}}$

$$b = \mathbf{proj}_n u = \underbrace{\boxed{\frac{u \bullet n}{||n||}}}_{|\cdot|=||b||} \underbrace{\boxed{\frac{n}{||n||}}}_{||\cdot||=1}$$

$\boxed{\text{Vårt avstånd är längden av projektionen ::}}$

$$||b|| = \frac{|u \bullet n|}{||n||} = \frac{(0,1,1) \bullet (2,-3,1)}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{|-2|}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

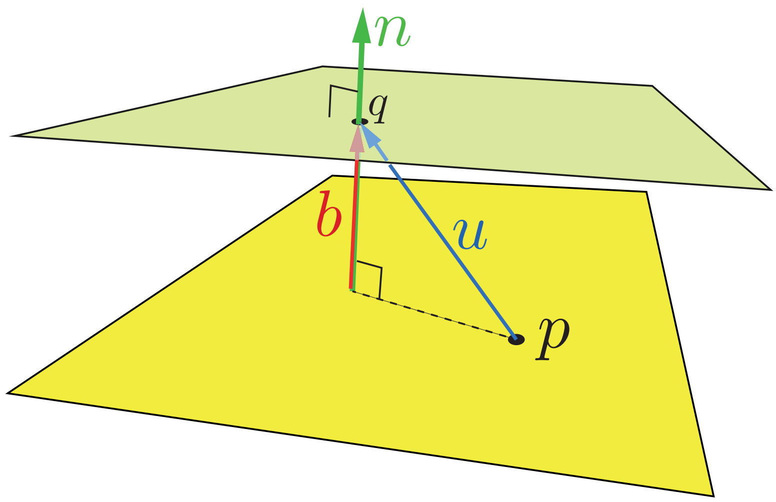
■

2.6 Avstånd mellan två plan

För att två plan ska ha ett positivt avstånd från varandra så krävs att de är parallella och inte har gemensamma punkter. Parallelliteten betyder att deras normalvektorer är parallella. Låt planen ges av ekvationerna $ax + by + cz = d_1$ och $ax + by + cz = d_2$.

Exempel 2.5. ex:distPlan2Plan

Låt planen ges av ekvationerna $3x + y - 2z = 1$ och $3x + y - 2z = 2$. Bestäm avståndet mellan dem. Situationen är som i figur 4



Figur 4: *Avståndet beräknas genom att först beräkna en punkt i vardera planet, sedan beräkna skillnadsvektorn u mellan dessa punkter. Avståndet är längden av projektionen b av skillnadsvektorn på normalvektorn.*

$\boxed{\text{Beräkning av punkter i vardera planet ::}}$

$p = (0, 1, 0)$ uppfyller ekvationen $3x + y - 2z = 1$ och ligger följdaktligen i det planet. P.s.s så ligger $q = (0, 0, -1)$ i det andra planet.

$\boxed{\text{Beräkning av skillnadsvektorn ::}}$

$$u = q - p = (0, 0, -1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, -1)$$

$\boxed{\text{Vi projicerar } u \text{ på normalvektorn ::}}$

Vi har samma normalvektor för de båda planen $n = (3, 1, -2)$

$$b = \mathbf{proj}_n u = \underbrace{\boxed{\frac{u \bullet n}{||n||}}}_{|\cdot|=||b||}\underbrace{\boxed{\frac{n}{||n||}}}_{||\cdot||=1}$$

$\boxed{\text{AVSTÅNDET ÄR LÄNGDEN AV PROJEKTIONEN ::}}$

$$||b|| = \frac{|u \bullet n|}{||n||} = \frac{(-1, 0, -1) \bullet (3, 1, -2)}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{|-1|}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

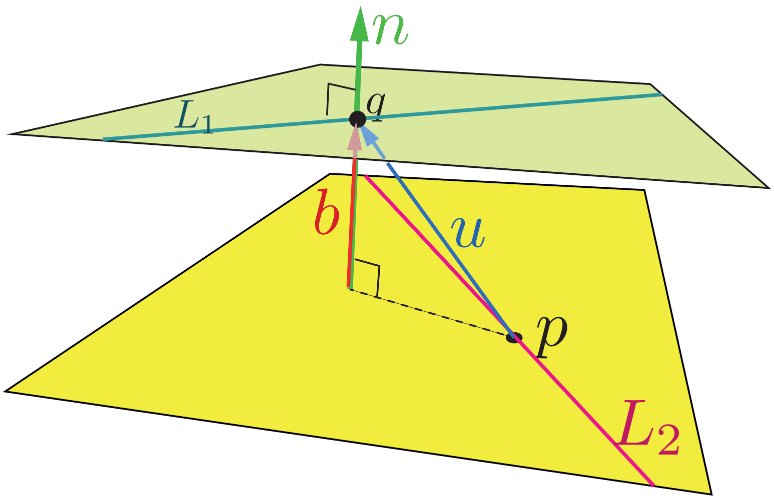
2.7 Avstånd mellan två linjer

Idén för att beräkna avståndet mellan två linjer kommer av att de två linjerna kan ses som att de ligger i varsitt plan som har normalvektor som är vinkelrät mot båda linjerna. Problemet reduceras då till att beräkna avståndet mellan två plan. Punkterna som används för att beräkna skillnadsvektorn tas från de båda linjerna.

Exempel 2.6. Beräkna avståndet mellan linjerna ex:distLn2Ln

$$L_t(s) = (1, 1, -2)s + (3, -2, 2), \qquad \text{och} \qquad L_2(t) = (-2, 1, 2)t + (-1, 3, 1)$$

Situationen är som i figur 5



Figur 5: *Beräkna normalvektorn till planen först. Denna fås genom kryssprodukten av linjernas riktningsvektor. När vi har denna är det bara att beräkna avståndet mellan planen. Givet är punkterna på linjerna. Bilda skillnadsvektor mellan dessa. Projicera skillnadsvektorn på normalvektorn och beräkna dess längd, som är vårt avstånd.*

Normalvektor för planen ::

Planen är parallella och deras gemensamma normalvektor är vinkelrät mot båda linjernas riktningsvektorer. Normalvektorn kan alltså beräknas m.h.a. kryssprodukten:

$$n = v_1 \times v_2 = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (4, 2, 3)$$

Vi beräknar skillnadsvektor mellan linjerna ::

$$u = (3, -2, 2) - (-1, 3, 1) = (4, -5, 1)$$

Projicera skillnadsvektorn på normalvektorn ::

$$b = \mathbf{proj}_n u = \underbrace{\boxed{\frac{u \bullet n}{||n||}}}_{|\cdot| = ||b||} \underbrace{\boxed{\frac{n}{||n||}}}_{||\cdot|| = 1}$$

Avståndet är längden av projektionen ::

$$||b|| = \frac{|u \bullet n|}{||n||} = \frac{|(4, -5, 1) \bullet (4, 2, 3)|}{\sqrt{16 + 4 + 9}} = \frac{9}{\sqrt{29}}$$

3 Uppgifter

1. Bestäm avståndet mellan planen $\Pi_1:\ 2x-2y+z=1$ och $\Pi_2:\ -2x+2y-z=2$
2. Visa att linjen som ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   är parallell med planet som ges av $-2x+y+2z=1$. Beräkna avståndet från linjen till planet.
3. Beräkna avståndet från punkten $p=(1,2,-1)$ till linjen $l(t)=(1,3,1)t+(2,-1,2)$
4. Bestäm avståndet från punkten $(1,2,1)$ till linjen $l(t)=(1,2,1)t+(0,1,0)$
5. Beräkna avståndet från punkten $p=(1,2,3)$ till linjen $l(t)=(1,1,1)t+(1,0,1)$
6. En datorspelutvecklare vid namn Stina håller på att planera en situation i ett tredimensionaellt spel där spelets hjältinna ska ta sig över från en bro till en annan bro. Stina modellerar broarna som räta linjer och nu måste hon se till att broarnas avstånd ligger på ett lagomt stort avstånd så att hjältinnan nätt och jämnt kan klara sig över med den kapacitet hon har. Visa med följande exempel hur Stina kan räkna ut avståndet mellan två linjer: $l_1(s)=(1,1,-2)s+(0,0,3)$ och $l_2(t)=(-2,1,1)t+(6,0,0)$. Visa även, med detta exempel, hur Stina ska bestämma punkterna på linjerna som ligger närmast varandra. Genom att veta dessa punkter kan Stina programmera in ledtrådar till var spelaren av spelet ska placera hjältinnan för att klara hoppet.
7. Räkna ut avståndet mellan följande två linjer: (8 poäng)

$$l_1(s)=(1,1,-2)s+(0,0,3) \quad \text{och} \quad l_2(t)=(-2,1,1)t+(6,0,0).$$

   Bestäm även punkterna på linjerna som ligger närmast varandra.
8. Beräkna avståndet mellan de två linjerna $l_1(t)=(1,1,0)s+(0,0,1)$ och $l_2(t)=(1,0,1)t+(0,1,0)$
9. Beräkna avståndet mellan linjerna $l_1(s)=(1,2,1)s+(1,2,1)$ och $l_2(t)=(2,1,2)t+(2,1,2)$.
10. Beräkna de punkter på linjerna $l_1(s)=(1,0,1)s+(1,0,0)$ och $l_2(t)=(1,1,-1)t+(0,1,0)$ som ligger närmast varandra.
11. Planen $P_1:-3x+y+z=0$ och $P_2:x+y-3z=2$ skär båda ett tredje plan $P_3:x-y+z=1$ längs var sin linje. Beräkna avståndet mellan dessa linjer.
12. Bestäm avståndet mellan linjerna $l_1(s)=(1,0,2)s+(1,0,-1)$ och $l_2(t)=(1,1,1)t+(1,2,3)$.

13. Beräkna avståndet mellan linjerna $l_1(s) = (-1, 2, 1)s+(1, 0, 0)$ och $l_2(t) = (2, 1, 2)t+(2, 0, 0)$.

14. Bestäm avståndet mellan linjerna $l_1(s) = (1, 0, -1)s+(3, 0, -2)$ och $l_2(t) = (2, -1, 0)t+(0, 6, 1)$.

15. Planen $P_1 : -3x + y + z = 0$ och $P_2 : x + y - 3z = 2$ skär båda ett tredje plan $P_3 : x - y + z = 1$ längs var sin linje. Beräkna avståndet mellan dessa linjer.
16. Beräkna avståndet mellan linjerna

$$l_1(s) = (1, -1, 1)s + (1, 0, 0) \quad \text{och} \quad l_2(t) = (1, 1, -1)t + (0, 1, 0)$$

17. Bestäm avståndet mellan linjerna $l_1(s) = (1, 0, -1)s+(3, 0, -2)$ och $l_2(t) = (2, -1, 0)t+(0, 6, 1)$.

18. Beräkna avståndet mellan linjerna $l_1(s) = (1, -1, 1)s+(2, 0, -1)$ och $l_2(t) = (1, 0, -1)t+(4, 3, -3)$. Beräkna även de närmaste punkterna.

19. Hur långt från origo passerar det plan som går genom de tre punkterna $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ och $(0, 1, 1)$
20. Bestäm avståndet från punkten $(1, 1, 2)$ till planet $\Pi_1 : x + 2y - z = 2$. Ligger denna punkt närmare Π_1 än avståndet mellan planet $\Pi_2 : -x - 2y + z = 3$ och Π_1?
21. Linjerna $l_1(s) = (1, 0, 1)s+(1, -1, 1)$ och $l_2(t) = (-1, 1, -1)t+(1, 0, 1)$, skär varandra. Hur långt från planet $x + y + z = 5$ ligger skärningspunkten?

Att beräkna:: Avstånd Version 1.01

Svar ::

1. Avståndet är 1.

2. Avståndet är 2.

3. $\sqrt{\frac{104}{11}}$

4. Avståndet är $1/\sqrt{3}$.

5. avståndet blir $\frac{\sqrt{30}}{3}$

6. Avståndet är $\sqrt{3}$. De närmaste punkterna är $p_1 = (1,1,1)$ och $p_2 = (2,2,2)$.

7.

8. Avståndet är 0.

9. Avståndet är noll.

10.

11. Avståndet är $\frac{\sqrt{30}}{6}$

12. Avståndet är $\sqrt{6}$.

13. Avståndet är $\frac{3}{\sqrt{50}}$

14. Avståndet är $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

15. Avståndet är $\frac{\sqrt{30}}{6}$

16. Avståndet är $1/\sqrt{2}$

17. Avståndet är $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

18. avståndet är $\sqrt{6}$. De närmaste punkterna är $(1,1,-2)$ för $s = -1$ och $(2,3,-1)$ för $t = -2$.

19. $2/\sqrt{3}$

20. Avståndet från punkten till Π_1 är $1/\sqrt{6}$. Avståndet mellan planen är $5/\sqrt{6}$ vilket innebär att punkten ligger närmast.

21. Avståndet är $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Att beräkna:: Avstånd Version 1.01

Lösningar

1. Idé: bestäm en skilnadsvektor mellan en punkt i det ena och en punkt i det andra planet. Projicera denna skillnadsvektor på normalvektorn till planen.
Punkten $p_1 = (0, 0, 1) \in \Pi_1$ och $p_2 = (0, 0, -2) \in \Pi_2$ och en skillnadsvektor mellan dessa punkter är $u = p_1 - p_2 = (0, 0, 1) - (0, 0, -2) = (0, 0, 3)$.
Planens normalvektor är $n = (2, -2, 1)$ och projektionen blir

$$v = proj_n u = \frac{u \bullet n}{||n||^2} n = \frac{1}{3}(2, 2, -1),$$

Avståndet blir nu $d = ||v|| = 1$.

2. Planet och linjen är parallella eftersom linjens riktningsvektor $v = (1, -2, 2)$ är vinkelrät mot planets normalvektor $n = (-2, 1, 2)$ ::

$$v \bullet n = (1, -2, 2) \bullet (-2, 1, 2) = 0$$

För att beräkna avståndet från linjen till planet kan vi argumentera för att avståndet är lika med längden av projektionen av en godtycklig skillnadsvektor mellan linjen och planet på planets normalvektor.
$\boxed{\text{Skillnadsvektor ::}}$ En punkt på linjen ges av $(3, -1, 1)$ och en punkt i planet är t.ex. $(0, 1, 0$. En skillnadsvektor mellan linjen och planet ges därför av

$$a = (3, -1, 1) - (0, 1, 0) = (3, -2, 1)$$

$\boxed{\text{projektion på normalvektor ::}}$

$$b = \mathbf{proj}_n a = \frac{a \bullet n}{||n||} n = \frac{(3, -2, 1) \bullet (-2, 1, 2)}{9}(-2, 1, 2) = \frac{-2}{3}(-2, 1, 2)$$

$\boxed{\text{avståndet ::}}$ Avståndet är längden av denna projektion och blir

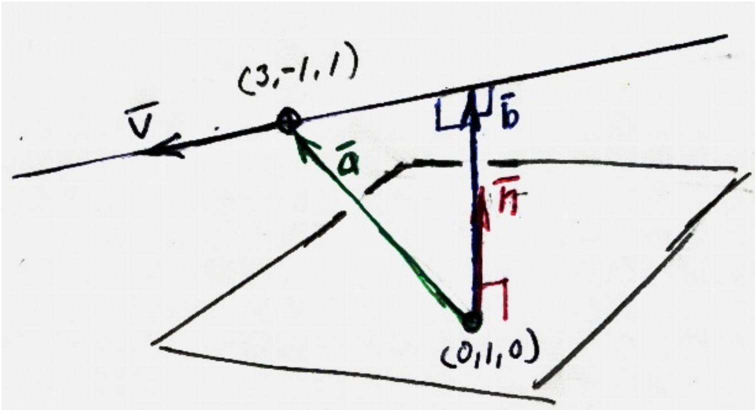
$$d = ||b|| = \frac{2}{3}\sqrt{9} = 2$$

3. Bilda skillnadsvektorn w mellan punkten p och punkten $q = (2, -1, 2)$ som ligger på linjen:

$$w = (1, 2, -1) - (2, -1, 2) = (-1, 3, -3)$$

Projicera denna skillnadsvektor på linjens riktningsvektor.

$$a = \mathbf{proj}_v w = \frac{w \bullet v}{||v||^2} v = \frac{5}{11}(1, 3, 1)$$



Figur 6: Figur till uppgift 8

Subtrahera denna projektion från skillnadsvektorn w och kalla denna nya vektor för d . (d är nu en ortogonal skillnadsvektor mellan punkten och linjen.)

$$d = w - a = \frac{1}{11}(-16, 18, -38)$$

Avståndet från punkten till linjen är nu $||d|| = \sqrt{\frac{184}{11}}$

4.

5.

6.

7.

8. Man ser tydligt att linjerna skär varandra i punkten $(1, 1, 1)$. Om man inte ser detta så kan man bräkna avståndet genom att ta fram en vektor som är ortogonal mot båda linjernas rikningsvektorer (använd kryssprodukten) Man får att vektorn $n = (-1, 1, 1)$ duger. Beräkna en skillnadsvektor: $a = (0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (0, -1, 1)$. Beräkna denna vektors projektion på vektorn n:

$$\frac{a \bullet n}{||n||^2} n = \frac{0}{3}(-1, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Vi får alltså att avståndet blir noll eftersom projektionsvektorn har längden noll.

9. Vi tänker oss att linjerna ligger i var sitt av två parallella plan som har normalvektor som är vinkelrät mot båda linjerna. Normalvektorn beräknas som kryssprodukten av linjernas riktningsvektorer: $\mathbf{n} = (1, 2, 1) \times (2, 1, 2) = (3, 0, -3)$. Vi tar sedan en skillnadsvektor mellan linjerna: lämpligen väljer vi $\mathbf{u} = (2, 1, 2) - (1, 2, 1) = (1, -1, 1)$. Denna projicerar vi på normalvektorn och projektionsvektorns längd är vårt avstånd. Projektionen blir nu noll eftersom skalärprodukten mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{n}$ blir noll. Detta betyder att avståndet är noll, dvs att linjerna skär varandra.

10. Det är inte svårt att inse att det finns en riktning som är ortogonal mot båda linjerna och att det därför måste finnas två parallella plan med denna riktning som normalvektor där det ena planet innehåller linjen l_1 och det andra linjen l_2. Avståndet mellan planen blir då avståndet mellan linjerna. Skillnadsvektorn mellan planen är parallell med normalvektorn och kan beräknas genom att projicera en skilnadsvektor mellan linjerna på normalvektorn. När vi beräknat denna måste vi beräkna punkterna på linjerna som ligger närmast varandra. Vi kan göra så här: När vi hittat de närmsta punkterna så blir dess skilnadsvektor lika med skillnadsvektorn mellan planen. Skilnadsvektorn mellan linjerna är $u_{st} = l_1(s) - l_2(t)$, som alltså beror av s och t. Vi måste bestämma dessa variabler så att u_{st} är parallell med planens skilnadsvektor. Detta ger oss att skalärprodukten mellan u_{st} och linjernas riktningsvektorer ska bli noll. Detta ger villkor ur vilka vi kan lösa ut s och t.
Vi beräknar först normalvektor för planet genom att ta kryssprodukten av linjernas riktningsvektor:

$$\mathbf{n} = (1,0,1) \times (1,1,-1) = (-1,2,1).$$

Nu beräknar vi en skilnadsvektor mellan linjerna:

$$\Delta = (1,0,0) - (0,1,0) = (1,-1,0).$$

Avståndsvektorn (a) mellan planen blir som vi sa projektionen av skillnadsvektorn Δ i normalvektorns riktning:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \bullet \mathbf{n}}{||\mathbf{n}||^2}\mathbf{n} = \frac{-1}{2}(-1,2,1).$$

Nu var det punkterna som ligger närmast vi var intresserade av: Vi bildar först skilnadsvektorn $\delta(s,t) = l_1(s) - l_2(t)$. Vid de närmsta punkterna så är denna lika med $\mathbf{a}$ och är därför ortogonal mot båda linjernas riktningsvektor, $r_1 = (1,0,1)$ och $r_2 = (1,1,-1)$. Vi har att $\delta(s,t) = r_1 s - r_2 t + \Delta$ och våra villkor blir nu:

$$\begin{aligned} 0 = \delta(s,t) \bullet r_1 &= r_1 \bullet r_1 s - r_2 \bullet r_1 t + \Delta \bullet r_1 \\ 0 = \delta(s,t) \bullet r_2 &= r_1 \bullet r_2 s - r_2 \bullet r_2 t + \Delta \bullet r_2 \end{aligned}$$

Med siffrorna instatta så blir detta

$$\begin{aligned} 2s + 0 \cdot t &= -1 \\ 0 \cdot s + 3t &= 0. \end{aligned}$$

Punkterna hittar vi tydligen genom att sätta $s = -1/2$ och $t = 0$, och vi får således punkterna $l_1(-1/2) = (1/2, 0, -1/2)$ och $l_2(0) = (0,1,0)$.
En enkel kontroll ger nu att $l_1(-1/2) - l_2(0) = (1/2, -1, 1/2)$, vilket var vad vi ville.

11. $P_2 \cap P_3$ **:** skärningslinjen är alla punkter som uppfyller båda planens ekvationer. Detta ger oss linjen $l_1 = (1,2,1)t + (3/2, 1/2, 0)$

$P_1 \cap P_3$ **:** skärningslinjen är alla punkter som uppfyller båda planens ekvationer. Detta ger oss linjen $l_1 = (1,2,1)t + (-1/2, -3/2, 0)$

avståndet mellan linjerna: Vi noterar att linjerna är parallella. Vi bildar en skillnadsvektor mellan linjerna: $u = (3/2, 1/2, 0) - (-1/2, -3/2, 0) = (2, 2, 0)$. Om vi drar bort projektionen av denna vektor längs linjernas riktningvektor $k = (1, 2, 1)$ så har vi en vektor $u_\perp$ vars längd är avståndet mellan linjerna. Projektionen blir

$$\mathbf{proj}_k u = \frac{u \bullet k}{||k||^2} k = \frac{6}{6}(1, 2, 1) = (1, 2, 1)$$

Nu får vi att $u_\perp = u - \mathbf{proj}_k u = (2, 2, 0) - (1, 2, 1) = (1, 0, -1)$

Avståndet mellan linjerna blir nu

$$||u_\perp|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

12. Beräkna en vektor som är vinkelrät mot båda linjerna: $n = (1, 0, 2) \times (1, 1, 1) = (-2, 1, 1)$. Beräkna en skillnadsvektor mellan linjerna $a = (1, 2, 3) - (1, 0, -1) = (0, 2, 4)$. Vi söker nu längden av a's projektion längs vektorn n:

$$proj_n a = \frac{a \bullet n}{||n||^2} n = (2, -1, -1),$$

vars längd blir $\sqrt{6}$. Detta är alltså vårt avstånd.

13. i. Bilda skillnads vektor mellan linjerna: $a = (2, 0, 0) - (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

ii. Beräkna vektor som är vinkelrät mot båda linjerna.

$$n = (-1, 2, 1) \times (2, 1, 2) = (3, 4, -5)$$

iii. Projicera skillnadsvektorn a på n:

$$b = \mathbf{proj}_n a = \frac{a \bullet n}{||n||^2} n = \frac{3}{5}(3, 4, -5)$$

iv. Vårt avstånd är nu längden av denna vektor b: $||b|| = \frac{3}{\sqrt{50}}$

14. Vi hittar minsta avstånd mha följande procedur.

i. Bestäm en vektor som är ortogonal mot båda linjerna: $n = (1, 0, -1) \times (2, -1, 0) = -(1, 2, 1)$.

ii. Bestäm en skillnadsvektor mellan linjerna: $a := (3, 0, -2) - (0, 6, 1) = (3, -6, -3)$.

iii. Projicera skillnadsvektorn på n:

$$a_n = \mathbf{proj}_n a = \frac{(3, -6, -3) \bullet (-1, -2, -1)}{||n||^2}(-1, -2, -1) = (-2, -4, -2)$$

iv. Avståndet mellan linjerna är nu längden av vektorn a_n: $d = ||a_n|| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

15. $P_2 \cap P_3$ **:** skärningslinjen är alla punkter som uppfyller båda planens ekvationer. Detta ger oss linjen $l_1 = (1, 2, 1)t + (3/2, 1/2, 0)$

$P_1 \cap P_3$: skärningslinjen är alla punkter som uppfyller båda planens ekvationer. Detta ger oss linjen $l_1 = (1,2,1)t + (-1/2, -3/2, 0)$

avståndet mellan linjerna: Vi noterar att linjerna är parallella. Vi bildar en skillnadsvektor mellan linjerna: $u = (3/2, 1/2, 0) - (-1/2, -3/2, 0) = (2, 2, 0)$. Om vi drar bort projektionen av denna vektor längs linjernas riktningvektor $k = (1, 2, 1)$ så har vi en vektor $u_\perp$ vars längd är avståndet mellan linjerna. Projektionen blir

$$\mathbf{proj}_k u = \frac{u \bullet k}{||k||^2} k = \frac{6}{6}(1,2,1) = (1,2,1)$$

Nu får vi att $u_\perp = u - \mathbf{proj}_k u = (2,2,0) - (1,2,1) = (1,0,-1)$

Avståndet mellan linjerna blir nu

$$||u_\perp|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

16. Idé: Börja med att bilda en skillnadsvektor mellan linjerna, t.ex. :$u = (1,0,0) - (0,1,0) = (1,-1,0)$. Den vektor som markerar det kortaste avståndet mellan linjerna får vi om vi projicerar denna skillnadsvektor på en vektor som är vinkelrät mot båda linjerna. Längden av denna projektionsvektor är det avstånd vi söker.
Utförande: En vektor som är vinkelrät mot båda linjerna får vi om vi tar kryssprodukten av de båda linjernas riktningsvektorer $v_1 = (1,-1,1)$ och $v_2 = (1,1,-1)$:

$$n_1 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (0,2,2)$$

Det enda vi behöver denna vektor till är att markera den riktning som är vinkelrät mot de båda linjerna och denna riktning ges lika bra av $n = (0,1,1)$ som dock har enklare siffror...
Nu ska vi alltså projicera skillnadsvektorn u i denna riktning:

$$a = proj_n u = \frac{u \bullet n}{||n||^2} n = \frac{(1,-1,0) \bullet (0,1,1)}{2}(0,1,1) = (0, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$$

Och längden av a blir $||a|| = \sqrt{(-1/2)^2 + (-1/2)^2} = 1/\sqrt{2}$

17. Vi hittar minsta avstånd mha följande procedur.

i. Bestäm en vektor som är ortogonal mot båda linjerna: $n = (1,0,-1) \times (2,-1,0) = -(1,2,1)$.

ii. Bestäm en skillnadsvektor mellan linjerna: $a := (3,0,-2) - (0,6,1) = (3,-6,-3)$.

iii. Projicera skillnadsvektorn på n:

$$a_n = \mathbf{proj}_n a = \frac{(3,-6,-3) \bullet (-1,-2,-1)}{||n||^2}(-1,-2,-1) = (-2,-4,-2)$$

iv. Avståndet mellan linjerna är nu längden av vektorn a_n: $d = ||a_n|| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

18. Idén är att linjerna ligger i var sitt plan som har normalvektor n lika med kryssprodukten av linjernas riktningsvektorer. Vi har

$$n = (1,-1,1) \times (1,0,-1) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (1,2,1)$$

Skillnadsvektorn $\mathbf{a} = (4,3,-3) - (2,0,-1) = (2,3,-2)$ går nu mellan planen. Längden av dess projektion i normalriktningen är avståndet mellan planen och därför mellan linjerna:

$$\mathbf{a}_n = proj_n \mathbf{a} = \frac{(2,3,-2) \bullet (1,2,1)}{||n||^2}(1,2,1) = (1,2,1).$$

Längden av denna vektor blir $||\mathbf{a}|| = \sqrt{6}$ vilket alltså är vårt avstånd.
För att beräkna de närmsta punkterna så bildar vi en godtycklig skilnadsvektor mellan linjerna; $\mathbf{u}(s,t) = l_2(t) - l_1(s) = (t-s, s, -t-s) + (2,3,-2)$. Vi söker nu s och t så att denna vektor blir parallell med planens normalvektor. Eftersom normalvektorn är vinkelrät mot båda linjernas riktningsvektorer så får vi följande ekvationssystem i s och t:

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{u}(s,t) \bullet (1,-1,1) &= -3s-3 && (1) \\ 0 = \mathbf{u}(s,t) \bullet (1,0,-1) &= 2t+4 && (2) \end{aligned}$$

Den först ekvationen ger $s = -1$, vilket ger punkten $l_1(-1) = (1,1,-2)$ på l_1. Den andra ekvationen ger $t = -2$ vilket ger punkten $l_2(-2) = (2,3,-1)$ på l_2

19.

20.

21. Skärningspunkten får vi fram genom att lösa $(1,0,1)s + (1,-1,1) = (-1,1,-1)t + (1,0,1)$, vilket ger $s = 1$ och $t = -1$. Skärningspunkten blir därför $p = (2,-1,2)$. Det enklaste sättet att beräkna avståndet på är att använda avståndsformeln (Thm 3.5.2 i Anton-Rorres):

$$D = \frac{|2-1+2-5|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$