DETERMINANTRÄKNING: KOMBINATION AV METODER

I många fall är Gausseliminationen själv en besvärlig metod att använda för att beräkna determinanten eftersom man måste noggrant bokföra de operationer som påverkar determinantens värde. Men styrkan ligger i att man genom att göra några få enkla eliminationssteg kan förenkla matrisen så att determinanträkningen med de andra metoderna blir enklare. Vi ska i följande exempel se hur detta kan gå till.

Exempel 1. Vi ska beräkna determinanten till matrisen

$$M\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Eftersom matrisen är en 4×4-matris så måste man använda antingen kofaktorutveckling eller Gausselimination för att beräkna matrisens determinant. I denna lösning kommer vi dock att göra en hybrid, en blandning av metoder:

i.) Börja med att byta plats på två rader för att få en bättre utgångspunkt vid Gausseliminationen. (kom ihåg att vi då får ett teckenbyte i determinanten.)

ii.) Utför vanlig Gausselimination för att få nollor nedanför första elementet i den första kolonnen.

iii.) Determinanten för matrisen med nollkolonn reduceras till att beräkna determinanten för en 3x3-matris. Denna 3x3 determinant kan vi beräkna med Sarrus regel.

Vi börjar med radbytet[1] och Gausseliminationen:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = M_1$$

Notera att radbytet gör att vi har $M = -M_1$ eftersom de vanliga radoperationerna som skapar nollorna inte påverkar determinanten.
Kofaktorutveckling längs första kolonnen ger oss nu att

$$M_1 = 1 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 7 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 7 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -19$$

Där vi använt Sarrus regel för att beräkna 3×3-matrisen:

$$\det \left(\begin{array}{ccc|cc} 7 & -1 & -3 & 7 & -1 \\ 7 & -2 & -7 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) =$$
$$= 7 \cdot (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-7) \cdot 2 + (-3) \cdot 7 \cdot (-1) - [(-3) \cdot (-2) \cdot 2 + 7 \cdot (-7) \cdot (-1) + (-1) \cdot 7) \cdot (-1)] =$$
$$= 14 + 14 + 21 - 12 - 49 - 7 = -19$$

Om vi sammanställer allt detta så får vi

$$M = -M_1 = -(-19) = 19$$

∎

[1] om man vill vara riktigt snitsig så gör man två radbyten och eftersom varje radbyte ger ett minustecken så ger dessa två tillsammans en ny matris som har samma determinant som den vi startade med, detta gjorde vi på campusföreläsningen 2013 02 19