HÖGSKOLAN I GÄVLE
TM-Matematik
Mikael Forsberg
0734 41 23 31

LINJÄR ALGEBRA/MATEMATIK FÖR INGENJÖRER
ma014a, ma031a
2011 05 06

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel förutom pennor, sudd, linjal, gradskiva. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. (a) För vilka värden på s är matrisen

$$M(s) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ s & 1 & 4 \\ 1 & -2 & s \end{bmatrix}$$

inverterbar?

(b) Beräkna inversen för det minsta positiva heltalsvärdet på s som gör matrisen inverterbar.

2. Beräkna volymen av den parallellepiped som vektorerna $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (3, -1, 1)$ och $v_3 = (1, 3, 2)$ spänner upp. Beräkna även arean av epipedens sidor.

3. Kolonnerna i matriserna A och B är två baser i $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

Beräkna matrisen som överför koordinatvektorer uttryckta i basen B till koordinatvektorer uttryckta i basen A.

Speciellt: Uttryck koordinatvektorn[1] $[1, 2, 3]_B$ med hjälp av basen A.

4. Beräkna baser för radrum, kolonnrum och nollrum för matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Beräkna den ellips på formen $ax^2 + by^2 = 1$ som bäst anpassar sig till punkterna $(-3, 0), (-2, -2), (-1, 1), (2, 1), (2, -2)$

6. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Är matrisen diagonaliserbar?

[1] index indikerar att vektorn är uttryckt i basen B

Svar till tentamen i Linjär algebra/Matematik för ingenjörer, 2011 05 06.

1.

2. Volymen ges av beloppet av determinanten till matrisen som har vektorerna som rader. Denna volym blir: $V = 25$. Arean av sidorna ges av kryssprodukternas längder: $||v_1 \times v_2|| = \sqrt{66}$, $||v_1 \times v_3|| = \sqrt{59}$ och $||v_3 \times v_2|| = \sqrt{150}$

3.

4. Se lösningen.

5.

$$\frac{14x^2}{113} + \frac{18y^2}{113} = 1$$

6.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra/Matematik för ingenjörer, 2011 05 06.

1. Determinanten för matrisen blir $s^2 - 4s - 21$ som har nollställena -3 och 7 varför matrisen är inverterbar för alla övriga värden. Matrisens invers för $s = 1$ blir

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{24} & \frac{5}{24} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

2. Volymen ges som beloppet av determinanten av matrisen M som har de tre vektorerna som rader:

$$V = |\det M| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right| = |-25| = 25$$

Arean av Parallellepipedens sidor ges av de tre kryssprodukternas längd::

$$\begin{aligned} ||v_1 \times v_2|| &= ||(1,-4,-7)|| = \sqrt{66} \\ ||v_1 \times v_3|| &= ||(7,-3,1)|| = \sqrt{59} \\ ||v_3 \times v_2|| &= ||(5,5,-10)|| = \sqrt{150} = 5\sqrt{6} \end{aligned}$$

3. Matriserna A och B är båda uttryckta i standardbasen (eftersom inget annat sägs så får vi anta det) och detta innebär att de utgör basbytesmatriserna från basen A respektive B till standardbasen. Situationen är som i figur 1 M.h.a. figuren kan vi se hur vi överför från basen

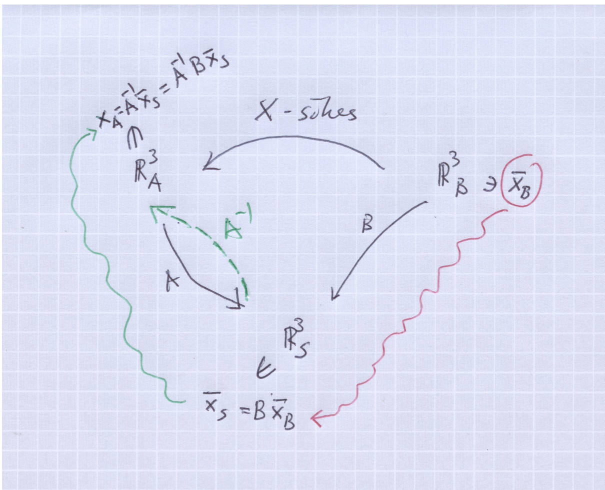

Figure 1: *Basbytessituationen i uppgift 3. Genom att följa vektorn x_B (koordinaterna m.a.p. B för en vektor) så ser vi hur vi får fram dess koordinater m.a.p. först standardbasen S och till sist m.a.p. basen A. Från detta ser man att den sökta matrisen X måste vara $A^{-1}B$!*

B till basen A, vilket ges av följande kedja:

$$x_B \quad \longmapsto \quad Bx_B = x_S \quad \longmapsto \quad A^{-1}x_S = A^{-1}Bx_B = x_A$$

Matrisen $A^{-1}B$ överför alltså koordinatvektorer m.a.p. B till koordinatvektorer m.a.p. A! Denna matrisprodukt får vi fram genom att Radreducera den utvidgade matrisen $(A|B)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

vilket ger oss att vår basbytesmatris X blir

$$X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Genom att använda denna så får vi att koordinatvektorn $x_B = [1,2,3]_B$ m.a.p. A ges av

$$x_A = Xx_B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_A$$

Vår koordinatvektor blir alltså

$$x_A = \frac{1}{2}[7,5,3]$$

4. Radreducerar man matrisen i uppgiften (kalla uppgiftsmatrisen för A) så får man

$$A_{red}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Från detta får vi att de tre första raderna i A_{red} är en bas för radrummet. Eftersom pivotelementen står i kolonn 1, 2 och 3 så är de tre första kolonnerna i ursprungsmatrisen A en bas för kolonnrummet. Nollrummet bestämmer vi från ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som efter radreducering blir

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

från vilket vi kan läsa att (om vi kallar variablerna för $x_1, \ldots, x_5$ och där $x_4 = s$ och $x_5 = t$ är fria variabler).

$$x_1 = -2s - \frac{1}{2}t, \quad x_2 = \frac{9}{2}s - \frac{1}{2}t, \quad x_3 = -\frac{19}{2}s + t,$$

vilket leder till lösningen på vektoriell parameterform::

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9/2 \\ -19/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

De två kolonnvektorerna i höger led är nu basen till nollrummet.

5. Systemet på matrisform blir $Ax = b$ där

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 4 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalekvationen $A^T Ax = A^T b$ blir

$$\begin{bmatrix} 130 & 37 \\ 37 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 10 \end{bmatrix}$$

som har lösningen

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{113} \\ \frac{18}{113} \end{bmatrix},$$

som ger oss ekvationen

$$\frac{14x^2}{113} + \frac{18y^2}{113} = 1$$

6. Kalla matrisen i uppgiften för M.

Vi börjar med att beräkna egenvärdena som bestäms ur den karakteristiska ekvationen $\det(M - \lambda I) = 0$:

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$$

vilket ger att egenvärdena är $\lambda = 1$ och $\lambda = 2$ som är ett dubbelt egenvärde. Vi noterar redan här att för att matrisen ska vara diagonaliserbar så måste egenrummet till $\lambda = 2$ vara tvådimensionellt. Detta måste vi alltså hålla koll på när vi beräknar egenvektorerna i det som följer:

Vi beräknar egenvektorerna till våra egenvärden:

$\lambda = 1$ ::

$$M - 1 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss egenvektorn

$$\begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/8 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Nu beräknar vi egenvektorerna till egenvärdet $\lambda = 2$. Är egenrummet tvådimensionellt?

$$M - 2 \cdot I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som ger oss egenvektorn

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss alltså att egenrummet till $\lambda = 2$ är en-dimensionellt, dvs den geometriska multipliciteten är ett. Den algebraiska multipliciteten som vi fick från karakteristiska ekvationen är 2. Eftersom dessa två multipliciteter inte är lika så är matrisen inte diagonaliserbar. (Thm 7 sidan 340 i kapitel 5.3 i Lay.)