HÖGSKOLAN I GÄVLE
TM-Matematik
Mikael Forsberg
0734 41 23 31

LINJÄR ALGEBRA/MATEMATIK FÖR INGENJÖRER
ma014a, ma031a
2011 03 28

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel förutom pennor, sudd, linjal, gradskiva. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Bestäm s så att systemet $M(s)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$M(s) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & s & 1 \\ 2 & 6 & s \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

så att

(a) systemet har en unik lösning

(b) systemet har många lösningar

(c) systemet saknar lösningar

2. Beräkna volymen av den parallellepiped som vektorerna $v_1 = (1, 3, 1)$, $v_2 = (2, 3, -1)$ och $v_3 = (-1, 1, 2)$ spänner upp. Beräkna även arean av epipedens sidor.

3. Beräkna baser för rad, kolonn och nollrum till matrisen

$$m_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Beräkna det andragradspolynom på formen $y = ax^2 + b$ som bäst anpassar sig till punkterna som ges av matrisen

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -1 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Beräkna en ON-bas för radrummet till matrisen

$$m_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. (a) Hitta en matris som diagonaliserar matrisen [4 poäng]

$$m_6 = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 5 \\ 2 & -3 & 7 \\ -2 & -7 & 23 \end{bmatrix}$$

(b) Vad blir diagonalmatrisen? [2 poäng]

Svar till tentamen i Linjär algebra/Matematik för ingenjörer, 2011 03 28.

1. (a) Systemet är unikt lösbart om $4 \neq s \neq -16$.

   (b) Många lösningar får vi om $s = 4$.

   (c) Om $s = -16$ så är systemet inkonsistent.

2. Volymen blir 3. De tre areorna spänns upp av

v_1, v_2 :: $3\sqrt{6}$

v_1, v_3 :: $5\sqrt{2}$

v_2, v_3 :: $\sqrt{83}$

3. Se lösningen

4. $y = \frac{381}{1276}x^2 - \frac{2309}{1276}$

5. För denna uppgift finns många möjliga svar. Se lösningen för en variant.

6. (a) Den diagonaliserande matrisen blir.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   (b) Den diagonala matrisen blir

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Lösningar till tentamen i Linjär algebra/Matematik för ingenjörer, 2011 03 28.

1. Börja med att beräkna determinanten till $M(s)$:

$$\det M(s) = -s^2 - 12s + 64 = -(s-4)(s+16)$$

Talen $s = 4$ och $s = -16$ är alltså kritiska för denna uppgift eftersom de ger ett system som inte är unikt lösbart. Systemet är alltså unikt lösbart om $4 \neq s \neq -16$.

Vi måste nu lösa systemet för dessa två kritiska värden för att kunna avgöra vilken typ av system de båda värdena ger. Vi börjar med $s = 4$ och får att systemets utvidgade matris kan radreduceras till:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

från vilket vi ser att nollraden längst ned ger oss ett system med många lösningar. Uppgiften eftersfrågade inte lösningar så vi går vidare med att undersöka fallet $s = -16$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & -16 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -16 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Här ser vi tydligt att rad 3 ger oss det motstridiga påståendet att $0 = 1$, vilket gör systemet inkonsistent.

2. Volymen av parallellepipeden får vi om vi beräknar determinanten av den man matris som har dessa vektorer som rader (eller som kolonner om man vill):

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

Arean av en av epipedens sidor kan beräknas med hjälp av längden av kryssprodukten av de vektorer som spänner upp sidan. Vi har

$$A_{12} = ||v_1 \times v_2|| = ||\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} || = ||(-6, 3, -3)|| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \quad (1)$$

$$A_{13} = ||v_1 \times v_2|| = ||\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} || = ||(5, -3, 4)|| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \quad (2)$$

$$A_{23} = ||v_1 \times v_2|| = ||\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} || = ||(7, -3, 5)|| = \sqrt{83} \quad (3)$$

$$(4)$$

3. Vi börjar med att radreducera matrisen och får då

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Från detta följder det att de tre raderna i den reducerade matrisen är en bas för radrummet. Eftersom de ledande elementen står i rad 1, 2 och 3 så har vi att kolonn 1, 2 och 3 i ursprungsmatrisen m_3 bildar en bas för kolonnrummet. För att bestämma en bas för nollrummet så uttrycker vi de ledande variablerna mha de fria $x_4 = s$ och $x_5 = t$ och får då att nollrummet kan skrivas

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

vilket betyder att de båda vektorerna till höger är en bas för nollrummet.

4. Problemet kan ställas upp som ett minsta kvadratproblem $Mx = b$ där

$$M = \begin{bmatrix} 16 & 1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 16 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Normalekvationen $M^T Mx = M^T b$ blir

$$\begin{bmatrix} 529 & 37 \\ 37 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91 \\ 2 \end{bmatrix}$$

som har lösningen

$$\begin{bmatrix} \frac{381}{1276} \\ -\frac{2309}{1276} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.298589 \\ -1.80956 \end{bmatrix}$$

vilket ger oss polynomet $y = \frac{381}{1276}x^2 - \frac{2309}{1276}$ Situationen visas i figuren

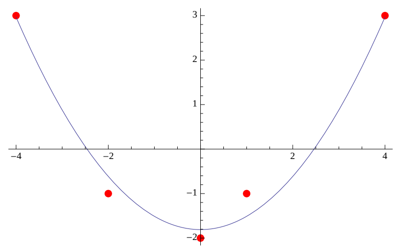

Figure 1: Punkter och bäst anpassade andragradare

5. Börja m.ed att sortera om raderna så att den sista raden kommer först

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Gausseliminering ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Använd rad 3 för att reducera rad 2 men gör det inte för rad 1. Detta ger oss följande matris vars rader ger oss en bas för radrummet vars två första rader redan är ortogonala, operationen är att vi först tar 1/2 gånger rad 3 som adderas till rad 2. Därefter multipliceras rad 2 med 2 för att få bort bråket. Resultatet blir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Med denna startpunkt får vi att radvektorerna

$$a_1 = (1, 0, 1, 0)$$
$$a_2 = (0, 2, 0, 1)$$

är ortogonala. Eftersom vi radrummet är tredimensionellt så behöver vi nu bara göra om den tredje radvektorn till att bli ortogonal mot a_1 och a_2. Detta åstadkommer vi genom att projicera på rummet W som spänns av a_1 och a_2. Vi får:

$$\mathbf{proj}_W a_3 = \mathbf{proj}_{a_1} a_3 + \mathbf{proj}_{a_2} a_3 = \frac{a_1 \bullet a_3}{||a_1||^2} a_1 + \frac{a_2 \bullet a_3}{||a_2||^2} a_2$$
$$= \frac{\overbrace{(1,0,1,0 \bullet (0,0,2,1)}^{=2}}{2}(1,0,1,0) + \frac{\overbrace{(0,2,0,1) \bullet (0,0,2,1)}^{=1}}{5}(0,2,0,1) =$$
$$= (1,0,1,0) + \frac{1}{5}(0,2,0,1) = \frac{1}{5}[(5,0,5,0) + (0,2,0,1)] = \frac{1}{5}(5,2,5,1)$$

För att få en ortogonal vektor så måste vi nu subtrahera denna projektion från vektorn $a_3 = (0, 0, 2, 1)$, vilket ger

$$b_3 = a_3 - \mathbf{proj}_W a_3 = (0,0,2,1) - \frac{1}{5}(5,2,5,1) = \frac{1}{5}[(0,0,10,5) - (5,2,5,1) = \frac{1}{5}(-5,2,5,-4)$$

En kontroll ger att denna vektor faktiskt är ortogonal mot de båda övriga!!

Vi har nu bara kvar att normera våra tre vektorer, vilket ger att vektorerna

$$e_1 = \frac{a_1}{||a_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)$$
$$e_2 = \frac{a_2}{||a_2||} = \frac{1}{5}(0,2,0,1)$$
$$e_3 = \frac{b_3}{||b_3||} = \frac{1}{\sqrt{70}}(-5,2,5,-4)$$

bildar en ON-bas för vårt radrum.

6. För att diagonalisera en matris så använder man sig av diagonaliseringsalgoritmen som involverar att man

i. Beräknar egenvärden: (löser $\det(m_6 - \lambda I) = 0$

ii. Beräknar egenvektorer för varje egenvärde.

iii. Den diagonaliserande matrisen har egenvektorerna som kolonner och

iv. Den diagonala matrisen har egenvärdena på diagonalen, i samma ordning som motsvarande egenvektorer står i den diagonalisernande matrisen.

Låt oss göra detta!

i. Egenvärden :: Vi får att det karakteristiska polynomet blir::

$$c(\lambda) = \det m_6 - \lambda I = \det \begin{bmatrix} 10-\lambda & -5 & 5 \\ 2 & -3-\lambda & 7 \\ -2 & -7 & 23-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 30\lambda^2 - 200\lambda = -(\lambda-20)(\lambda-10)\lambda,$$

där faktoriseringen görs genom att först bryta ut λ och sedan beräkna nollställena till det andragradspolynom $-\lambda^2 + 30\lambda - 200$. Som ses så får vi egenvärdena $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 10$ och $\lambda_3 = 20$.

ii. Egenvektorer :: För vardera egenvärdet ska vi nu lösa $(m_6 - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$\lambda_1 = 0$ :: Här får vi den utvidgade matrisen och dess radreduktion till

$$\begin{pmatrix} 10 & -5 & 5 \\ 2 & -3 & 7 \\ -2 & -7 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som ger oss egenvektorn $e_1 = (1, 3, 1)$

$\lambda_2 = 10$ :: Här får vi istället

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 2 & -13 & 7 \\ -2 & -7 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och egenvektor blir $e_2 = (3, 1, 1)$

$\lambda_3 = 20$ :: För vårt sista egenvärde så har vi

$$\begin{pmatrix} -10 & -5 & 5 \\ 2 & -23 & 7 \\ -2 & -7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vilket leder till egenvektorn $e_3 = (1, 1, 3)$.

iii. Den diagonaliserande matrisen :: De tre egenvektorerna insatta som kolonner i en matris ger oss den diagonaliserande matrisen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

iv. Den diagonala matrisen :: Den diagonala matrisen Λ kan beräknas enligt

$$\Lambda = P^{-1} m_6 P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Denna produkt behöver man dock inte räkna ut eftersom vi vet att den diagonala matriser kommer att ha egenvärdena på diagonalen. Man behöver bara vara noggrann så att egenvärdena ställs upp i samma ordning som deras egenvektorer ställdes upp.