HÖGSKOLAN I GÄVLE
TM-Matematik
Sören Hector :: 070-46 16 086
Mikael Forsberg :: 0734-41 23 31

MATEMATIK FÖR INGENJÖRER
LINJÄR ALGEBRA,
MA031A, MA014A
2011 10 31

Skrivtid: 09:00-14:00.

- *Inga hjälpmedel.*
- *Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa.*
- *Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor.*
- *Skriv namn på varje inlämnat blad.*

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 5 \\ x + 4y + 6z = 5 \\ -x - 5y - 4z = 1 \end{cases}$$

2. (a) Bestäm storleken (absolutbeloppet) och argumentet till $z = 1 - i$.
   (b) Uttryck på rektangulär form (dvs som $z = a + bi$) då $|z| = 2$ och $\arg z = \pi/4$.
   (c) Förenkla $\frac{1-i}{1+i}$.
   (d) Förenkla $\frac{2i-2}{4+4i}$.
   (e) Lös ekvationen $z^4 + 1 = 0$

3. Beräkna volymen för den parallellepiped som spänns av följande tre vektorer:

$$\mathbf{v_1} = (1, -3, 2), \qquad \mathbf{v_2} = (-3, 1, 2) \quad \text{och} \quad \mathbf{v_3} = (2, -30, 1)$$

Beräkna också arean av den del av ytan som spänns av $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ Volymen ges alltså som absolutbeloppet av determinanten till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -30 & 1 \end{pmatrix}$$

som blir 216. Arean som spänns av v_1 och v_2 ges av längden av deras kryssprodukt

$$v_1 \times v_2 = -(8, 8, 8) = -8(1, 1, 1)$$

Längen av denna vektor blir $8\sqrt{3}$ vilket alltså är måttet på den sökta arean.

4. Skapa ur vektorerna $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)$ samt $v_3 = (0, 1, 1, 1)$ en ON-bas.

5. Beräkna baser för rad, kolonn och nollrum för följande matris

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -5 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Det har blivit stopp i avloppet till badkaret. Sakta sjunker nivån på vattnet och innan det är borta är inte Bennys Rör UPA sugna på att börja rota i det. För att kunna beräkna tiden tills det går att starta mäts vattendjupet: (tid; vattendjup) (0; 19), (1; 16), (2; 14), (3; 11). Skapa nu en funktion som, enligt minsta kvadratmetoden, bäst beskriver vattennivån med avseende på tiden. Bestäm därur när Bennys Rör UPA som tidigast kan komma.

7. För vilka värden på parametern t har systemet $A(t)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & t \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   (a) en unik lösning

   (b) oändligt många lösningar

   (c) ingen lösning

8. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Är matrisen diagonaliserbar? Om matrisen är diagonaliserbar beräkna den diagonala matrisen och den diagonaliserande matrisen.

Svar till tentamen i Linjär algebra, , 2011 10 31.

1. $(x, y, z) = (1, -2, 2)$

2. Se lösningen.

3.

4.

$$o_1 = v_1/||v_1|| = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \quad o_2 = v_2/||v_2|| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0) \quad o_3 = u_3/||u_3| = \frac{1}{2}(-1,1,-1,1)$$

5.

6. Vattendjupet = -2,6 t + 18,9; Tidigast om 7 7/26 h

7. (a) $-1 \neq t \neq 3$ ger ett system som har unik lösning.

   (b) $t = -1$ ger ett system som har många lösningar

   (c) För $t = 3$ så har vi ett inkonsistent system.

8.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, , 2011 10 31.

1. Ställ upp ekvationssystemet på matrisform och Gauss-Jordan eliminera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \\ -1 & -5 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

2. (a)

$$|z| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^1} = \sqrt{2}$$
$$\arg z = \arctan \frac{-1}{1} = -\pi/4$$

(b)

$$z = |z|(\cos\phi + i \sin\phi) = 2(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

(c)

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i$$

(d)

$$\frac{2i-2}{4+4i} = \frac{2}{4}\frac{i-1}{1+i} = [\text{ mha 2c: }] = -i/2$$

(e) Skriv på polär form: $z^4 = |z|^4 e^{i4\phi}$, $-1 = e^{i\pi + 2\pi k}$

$$\begin{aligned} |z|^4 &= 1 \quad \text{ekvation för beloppet} \\ 4\phi &= \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ekvation för argumentet} \end{aligned}$$

Som ger os lösningen

$$\begin{aligned} |z| &= 1 \\ \phi &= \pi/4 + \pi/2k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

3. Volymen :: Volymen beräknas som beloppet av determinanten av den matris som har de tre vektorerna som rader.

Arean av de olika sidorna: Beräkna kryssprodukten av varje par av vektorer. Längderna av dessa kryssproduktsvektorer är arean av det parallellogram som spänns av kryssproduktens båda vektorer.

Begränsningsytans area :: Arena ges av kryssprodukten $v_1 \times v_2$.

4. Notera att de två första vektorerna redan är vinkelräta vilket betyder att för att få en tredje ortogonal vektor så behöver vi projicera den sista vektorn på de två första och sedan subtrahera dessa projektioner från sista vektorn:

$$\mathbf{proj}_{v_1} v_3 = \frac{v_3 \bullet v_1}{||v_1||^2} v_1 = \frac{3}{4}(1, 1, 1, 1) \tag{1}$$

$$\mathbf{proj}_{v_2} v_3 = \frac{v_3 \bullet v_2}{||v_2||^2} v_2 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1, 0) \tag{2}$$

Man får då vektorn

$$u_3 = v_3 - \mathbf{proj}_{v_1} v_3 - \mathbf{proj}_{v_2} v_3 = \frac{1}{4}(-1, 1, -1, 1)$$

Normering av de tre vektorerna v_1, v_2 och u_3 ger oss vår ON-bas:

$$o_1 = v_1/||v_1|| = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \quad o_2 = v_2/||v_2|| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0) \quad o_3 = u_3/||u_3| = \frac{1}{2}(-1,1,-1,1)$$

5. GaussJordan eliminering av B ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{5} & -\frac{17}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket ger att de tre nollskillda raderna är bas för radrummet. Kolonnrummet har en bas som består av de tre första kolonnerna i matrisen B. Nollrummets bas får vi från den gausseliminerade matrisen (om man vill utvidgad med ett högerled som består av nollor) Om vi kallar variablerna för $x_1, \ldots, x_5$ så får vi att $x_4 = s$ och $x_5 = t$ är fria variabler och kan alltså ges av parametrarna s och t som vi just definierade. Vi uttrycker de övriga variablerna mha dessa parametrar och får därför att nollrummet beskrivs av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{11}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{17}{10} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t,$$

där de båda vektorerna i höger led är basvektorerna för nollrummet.

6. Här gör vi en minsta kvadratanpassning av en rät linje $D = at + b$ till mätpunkterna. Sätter vi in punkterna i ekvationen så får vi systemet $Ax = b$, där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Detta system är överbestämt och vi ställer upp normalekvationen $A^T Ax = A^T b$ för att kunna beräkna minsta kvadratlösningen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 16 \\ 14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Multipliceras matriserna ihop så får vi följande system:

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Detta system har lösningen

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{5} \\ \frac{189}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.6 \\ 18.9 \end{bmatrix}$$

som ger oss den optimala räta linjen.

$$D = -2.6t + 18.9$$

Bennys Rör kommer inte förrän vattnet är borta, dvs de kommer inte förrän $D = 0$, vilket inträffar då $t = \frac{\frac{189}{10}}{\frac{13}{5}} = \frac{189}{26} = 7\frac{7}{26}$, dvs efter 7 7/26 timmar.

7. Determinanten för matrisen är

$$\det A[t] = -2t^2 + 4t + 6 = -2(t^2 - 2t - 3) = -2(t+1)(t-3)$$

som har nollställena $t = -1$ och $t = 3$.

(a) Om t inte är något av dessa värden så är matrisen inverterbar och systemet har då en unik lösning $\mathbf{x} = A[t]^{-1}\mathbf{x}$.

(b) Om $t = -1$ så ger gausselimination av den utvidgade matrisen $A[-1]|\mathbf{b}$ en nollrad, vilket ger att systemet då har oändligt många lösnnigar.

(c) Om $t = 3$ så får vi ett inkonsistent system som alltså saknar lösningar.

8. Man beräknar först egenvärdena:

$$0 = \det(E - \lambda I) = \underbrace{-\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4}_{\text{det karakteristiska polynomet}} = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 1),$$

där vi fått fram faktorerna genom att gissa nollställena (som blir ± 1 och 4) utifrån antagandet att de är heltal som delar -4. De heltal som då kommer i fråga är $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ och genom att stoppa in vardera av dessa tal i vårt karakteristiska polynom så kan vi avgöra vilka som gör polynomet noll.

Vi har nu alltså tre olika nollställen, vilket betyder att matrisen är diagonaliserbar (vilket också är givet från det faktum att matrisen E är symmetrisk) och att den diagonala matrisen har våra egenvärden, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ och $\lambda_3 = 4$, som diagonalelement:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

För att lösa resten av uppgiften så behöver vi beräkna egenvektorerna till matrisen

Egenvektorer till $\lambda_1 = 1$ :: Vi måste lösa $(E - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Vi får då att matrisen till vänster (vi skriver alltså inte upp högerledet vilket är onödigt eftersom det inte kommer förändras (eftersom det är noll) när vi utför radoperationerna.) blir som då Gauss-Jordan elimineras

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Gauss-Jordan ger} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss egenrummet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_1}} t$$

Egenvektorer till $\lambda_2 = -1$ **::** Vi måste lösa $(E - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Vi får då att matrisen till vänster (vi skriver alltså inte upp högerledet vilket är onödigt eftersom det inte kommer förändras (eftersom det är noll) när vi utför radoperationerna.) blir som då Gauss-Jordan elimineras

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Gauss-Jordan ger} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss egenrummet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_2}} t$$

Egenvektorer till $\lambda_3 = 4$ **::** Vi måste lösa $(E - \lambda_3 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Vi får då att matrisen till vänster (vi skriver alltså inte upp högerledet vilket är onödigt eftersom det inte kommer förändras (eftersom det är noll) när vi utför radoperationerna.) blir som då Gauss-Jordan elimineras

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{Gauss-Jordan ger} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss egenrummet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_3}} t$$

Slutligen behöver vi ange den diagonaliserande matrisen och en sådan får vi om vi ställer upp våra egenvektorer i rätt ordning som kolonner i en matris. Den ordning vi ska ha måste överensstämma med ordningen som egenvärdena placerades i. Vår diagonaliserande matris P blir alltså

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

där $\mathbf{e_1}$,$\mathbf{e_2}$ och $\mathbf{e_3}$ står i första, andra respektive tredje kolonnen vilket överenstämmer med ordningen för motsvarande egenvärden i diagonalmatrisen.