HÖGSKOLAN
I GÄVLE
ATM-Matematik
Sören Hector :: 070-4616086
Mikael Forsberg :: 0734-412331

kurser::
LINJÄR ALGEBRA MA014A
MATEMATIK FÖR INGENJÖRER MA031A
2011 12 05

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Lös ekvationssystemet $A\mathbf{x} = b$ där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 \\ -3 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. (a) Bestäm storleken (absolutbeloppet) och argumentet till $z = 9 + 12i$
   (b) Uttryck som $z = z + bi$, då $|z| = 4$ och $\arg z = \pi/3$
   (c) Förenkla $\frac{1+i}{1-i}$
   (d) Förenkla $\frac{(1+i)(16-16i)}{(4i-4)^2}$
   (e) Lös ekvationen $z^3 = \sqrt{3} - i$

3. I en laboration har man kopplat upp ett nätaggregat, ett motstånd, en massa sladdar, en voltmeter och en amperemeter. Man märker att man har en grundspänning trots att man inte har någon ström. Därför tänker man sig att man vill mäta upp motståndets resistans enligt formeln

$$U = I \cdot R + U_o,$$

där U är spänningen, R är resistansen, I är strömmen och U_o är den vilospänning man uppmätt. Man får då följande mätvärden: Bestäm resistansen och vilospänningen som

U (volt)	I (milliampere)
2	0
4	1
6	2
9	3

bäst anpassar sig till värdena, enligt minsta kvadratmetodens mening.

4. Skapa ur vektorerna $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (-1, 0, 1, 0)$ och $w = (0, 1, 3, 1)$ en ON-bas.

5. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Är matrisen diagonaliserbar, motivera? Om matrisen är diagonaliserbar beräkna den diagonala matrisen och den diagonaliserande matrisen.

6. Beräkna bas för rad, kolonn och nollrum för följande matris

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Beräkna volymen för den parallellepiped som spänns av följande tre vektorer:

$$\mathbf{v_1} = (1, -3, 2), \qquad \mathbf{v_2} = (-3, 1, 2) \quad \text{och} \quad \mathbf{v_3} = (2, -3, 1)$$

Beräkna också arean av de ytor som varje par av ovanstående vektorer spänner upp.

8. Bestäm de värden på parametern c som gör att systemet $A(c)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A(c) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & c & 2 \\ c & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(a) en unik lösning

(b) oändligt många lösningar

(c) ingen lösning

Svar till tentamen i Linjär Algebra ma014a, 2011 12 05.

1.
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. (a) 15 och $\tan^{-1} 4/3$

   (b) $4(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 2 + 2i\sqrt{3}$

   (c) i

   (d) i

   (e) $\underbrace{-\frac{\pi}{18}}_{=-10^\circ} + \frac{2\pi}{3}k, \quad k = 0, 1, 2$

3. $R = 2.3$ kOhm, $U_o = 1.8$ Volt

4.
$$o_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$$
$$o_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0)$$
$$o_3 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$$

5. Matrisen ej diagonaliserbar

6. Se lösningen

7.

8. (a) $1 \neq c \neq 5$ ger oss system med unik lösning.

   (b) $c = 1$ ger ett system som har många lösningar.

   (c) $c = 5$ ger ett system som saknar lösningar.

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra ma014a, 2011 12 05.

1. Bilda den utvidgade matrisen och radreducera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -7 & 4 \\ -3 & -2 & 12 & -7 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Från detta kan man utläsa att lösningarna blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. (a)

$$|z| = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$$
$$\arg z = \arctan\frac{12}{9} = \arctan\frac{4}{3}$$

(b)

$$z = 4(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) = 2 + 2i\sqrt{3}$$

(c)

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

(d)

$$\frac{(1+i)(16-16i)}{(4i-4)^2} = \frac{16(1+i)(1-i)}{[4(i-1)]^2} = \frac{1+i}{1-i} == [\text{ från 2c }] = i$$

(e) Ekvationen för beloppet blir $|z|^3 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$ som ger oss $|z| = \sqrt[3]{2}$.
Ekvationen för argumentet ger oss

$$3\arg z = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

där θ är argumentet för $\sqrt{3} - i$ som blir $\tan^{-1}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6 = -30°$.
Lösningen blir därför

$$\arg z = \underbrace{-\frac{\pi}{18}}_{=-10°} + \frac{2\pi}{3}k, \quad k = 0, 1, 2$$

3. Sätter man in de olika värdena från tabellen i ekvationen så får man matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ U_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Multipliciera båda led med 4×2-matrisens transponat så att vi får **normalekvationen::**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 43 \\ 6 & 4 & 21 \end{array}\right]$$

som har lösningen

$$\begin{pmatrix} \frac{23}{10} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

Vilket ger oss att $R = \frac{23}{10} = 2.3$ och $U_o = \frac{9}{5} = \frac{18}{10} = 1.8$

4. Notera att u och v är ortogonala eftersom $u \bullet v = 0$. Det är därför lämpligt att starta Gram-Schmidt processen med dessa två vektorer. Vi sätter därför $a_1 = u$ och $a_2 = v$ och subtraherar w's projektioner längs dessa vektorer från w (enligt projektionssatserna) och ska då få en tredje vektorer som är vinkelrät mot dessa båda. Vi får

$$\begin{aligned}
a_3 &= w - \mathbf{proj}_{a_1} w - \mathbf{proj}_{a_2} w = \\
&= w - \frac{(0,1,3,1) \bullet (1,1,1,1)}{4}(1,1,1,1) - \frac{(0,1,3,1) \bullet (-1,0,1,0)}{2}(-1,0,1,0) = \\
&= (0,1,3,1) - \frac{5}{4}(1,1,1,1) - \frac{3}{2}(-1,0,1,0) = \\
&= \frac{1}{4}[(0,4,12,4) - (5,5,5,5) - (-6,0,6,0)] = \frac{1}{4}(1,-1,1,-1)
\end{aligned}$$

En snabb kontroll ger att denna vektor är ortogonal mot de två första vektorerna vilket betyder att vi är klara så fort vi normerat våra tre vektorer. Vi får därför följande ortogonala bas

$$\begin{aligned}
o_1 &= \frac{a_1}{||a_1||} = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \\
o_2 &= \frac{a_2}{||a_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0) \\
o_3 &= \frac{a_3}{||a_3||} = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)
\end{aligned}$$

5. Egenvärden ::

$$0 = \det(E - \lambda I) = \underbrace{-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1}_{\text{det karakteristiska polynomet}} = -(\lambda - 1)^3,$$

Där den sista faktoriseringen fås genom att känna igen att polynomet är utvecklingen av $-(\lambda-1)^3$. Gör man inte detta så testar man alla heltals faktorer till konstanttermen 1. De enda möjliga faktorererna är alltså ± 1, från vilket vi ser att $\lambda = 1$ är ett nollställe och då kan man utföra polynomdivision för att få fram ett andragradspolynom som ger oss de övriga nollställena. Vi får alltså att $\lambda = 1$ är ett nollställe med multiplicitet 3. Om matrisen ska vara diagonaliserbar så behöver motsvarande egenrum vara tredimensionellt vilket i detta fall är en omöjlighet eftersom det skulle innebära att vårt system $(E - \lambda I)x = 0$ skulle få tre nollrader...

Egen rummet till $\lambda = 1$ :: Vi måste lösa $(E - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

Vi får då att matrisen till vänster (vi skriver alltså inte upp högerledet vilket är onödigt eftersom det inte kommer förändras (eftersom det är noll) när vi utför radoperationerna.) blir som då Gauss-Jordan elimineras:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Gauss-Jordan ger} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vilket ger oss att vi har två ledande variabler x och z och en fri variabel $y = s$. Egenrummet är med andra ord endimensionellt.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_1}} s$$

Diagonaliserbarhet :: Eftersom egenvärdet var trippelt (dvs den algebraiska multipliciteten är 3) och egenrummet en dimensionellt (dvs den geometriska multipliciteten är 1) så är matrisen ej diagonaliserbar (eftersom algebraisk multipliciteten måste vara lika med den geometriska multipliciteten för att en matris ska vara diagonaliserbar)

6. Gauss-Jordan elimination ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vilket ger oss att

(a) En bas för radrummet är de tre nollskilda raderna i denna eliminerade matris

(b) Eftersom pivotelementen befinner sig i kolonn 1, 2 och 3 så är dessa kolonner i matrisen B en bas för kolonnrummet.

(c) För nollrummet så får vi att $x_1 = -x_5$ och $x_2 = -x_4$, $x_3 = 0$ och eftersom de två sista variablerna är fria så sätter vi $x_4 = s$ och $x_5 = t$ vilket ger oss att nollrummet ges av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{basvektor}} s + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{basvektor}} t,$$

7. Volymen :: Volymen beräknas som beloppet av determinanten av den matris som har de tre vektorerna som rader. Volymen blir alltså

$$V = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Arean av de olika sidorna: Beräkna kryssprodukten av varje par av vektorer. Längderna av dessa kryssproduktsvektorer är arean av det parallellogram som spänns av kryssproduktens båda vektorer.

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 = -(8,8,8) \quad &\Rightarrow \quad A_{12} = ||-(8,8,8)|| = \sqrt{3 \cdot 64} = 8\sqrt{3} \\ v_1 \times v_3 = (3,3,3) \quad &\Rightarrow \quad A_{13} = ||(3,3,3)|| = \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3} \\ v_2 \times v_3 = (7,7,7) \quad &\Rightarrow \quad A_{23} = ||(7,7,7)|| = \sqrt{3 \cdot 49} = 7\sqrt{3} \end{aligned}$$

8. Beräkna först matrisens determinant:

$$\det A(c) = -c^2 + 6c - 5 = -(c^2 - 6c + 5)$$

som blir noll om $c = 1$ eller om $c = 5$. Dessa två värden gör att matrisen saknar invers vilket innebär att för dessa värden så får vi ett system som antingen saknar lösningar eller har många lösningar.

(a) Om $1 \neq c \neq 5$ så får vi system som är unikt lösbara.

(b) För $c = 1$ så får vi följande utvidgade system som gausselimineras så att den får en nollrad:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta betyder att systemet har en fri variabel och därför oändligt många lösningar.

(c) Om $c = 5$ får vi följande utvidgade matris som gausselimineras så att vi ser att det är inkonsistent:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$