HÖGSKOLAN I GÄVLE
TM-Matematik
Sören Hector :: 070-4616086
Mikael Forsberg :: 0734-412331

kurser::
Linjär Algebra ma014a
Matematik för ingenjörer ma031a
2012 03 27

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 3x+y-z &= 0 \\ 4x+y-2z &= 0 \\ 2x+y &= 0 \end{aligned}$$

2. (a) Bestäm storleken (absolutbeloppet) och argumentet till $z = 3-4i$.
   (b) Uttryck som z=a+bi, då $|z| = 16$ och $\arg z = 5\pi/4$.
   (c) Förenkla $\frac{3+4i}{6-8i}$.
   (d) Förenkla $\frac{(3+4i)^2(3-4i)}{(\frac{3}{2}+2i)(6-8i)^2}$
   (e) Lös ekvationen $z^5 = -\sqrt{3}+i$

3. Lös det överbestämda systemet nedan på bästa sätt i minsta kvadratmening

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ x+y &= 1 \\ x+2y &= 2 \end{aligned}$$

4. Major Tom har tappat kontrollen med Jorden under sin resa i rymden. Allt han vet är mätt i den jordiska standardbasen $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$. Bestäm en ny ON-bas som har hans nya färdriktning $u = (1,1,\sqrt{2})$ som huvudaxel.

5. Beräkna bas för rad, kolonn och nollrum för följande matris

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Beräkna determinanten till följande tre matriser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Är matrisen diagonaliserbar? Om matrisen är diagonaliserbar beräkna den diagonala matrisen och den diagonaliserande matrisen.

8. Låt

$$A[t] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & c & -1 \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm de värden på parametern c som gör matrisen inverterbar.[1]

(b) Beräkna inversen till matrisen för det minsta positiva heltalsvärde på c som gör att matrisen är inverterbar.

[1] I uppgiften som delades ut på tentan fanns ett skrivfel där det stod t i stället för c i uppgiftsformuleringarna, av att döma från tentamensresultatet så verkar detta dock inte orsakat några större problem...

Svar till tentamen i Linjär Algebra ma014a, 2012 03 27.

1.
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

2. (a) $|z| = 5$, $\arg z = \tan^{-1} 4/3$

(b) $z = 16(\cos 5\pi/4 + i \sin 5pi/4) = -\frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{16i}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{1}{10}(-7 + 24i)$

(d) $\frac{1}{10}(-7 + 24i)$

(e) beloppet:: $|z] = \sqrt[5]{2}$, argumentet:: $\arg z = \pi/6 + k \cdot 2\pi/5,\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$

3. $x = 5/6$, $y = 1/2$

4. Många svar är möjliga, se lösningen för idéer.

5. Se lösningen

6. $\det A = -12\det B = 12\det C = -12$

7. Eigensystem[E]
$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ \{1,1,1\} & \{-1,0,1\} & \{-1,1,0\} \end{pmatrix}$$

8. (a) Matrisen saknar invers om $c - 1$.

(b) Det minsta positiva heltalet som går att $A(c)$ har invers är 1 och vi får

$$A(1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra ma014a, 2012 03 27.

1. Ställ upp systemet på matrisform och GaussJordaneliminera::

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Detta ger oss att $z = t$ är fri och om vi löser ut x och y så får vi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

2. (a) Vi har att $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Argumentet ges av $\arg z = \arctan -4/3$.

(b) $z = 16(\cos 5\pi/4 + i \sin 5pi/4) = -\frac{16}{\sqrt{2}} - \frac{16i}{\sqrt{2}}$

(c)

$$\frac{3+4i}{6-8i} = \frac{3+4i}{2(3-4i)} = \frac{(3+4i)^2}{2(3-4i)(3+4i)} = \frac{(3+4i)^2}{2 \cdot 5} = \frac{9+24i+16i^2}{10} = -\frac{7}{10} + \frac{24}{10}i$$

(d)

$$\frac{(3+4i)^2(3-4i)}{(\frac{3}{2}+2i)(6-8i)^2} = \frac{(3+4i)^2(3-4i)}{\frac{1}{2}(3+4i) \cdot 4 \cdot (3-4i)^2} = \frac{(3+4i)}{2(3-4i)} = [\text{ se uppgift c }] = -0.7 + 2.4i$$

(e) Skriv ekvationen på polär form:

$$r^5 e^{5\theta} = 2e^{i5\pi/6+2\pi k}$$

Detta ger oss att beloppet för z blir

$$|z| = r = 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}.$$

Argumentet blir

$$\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{5} = 30° + k \cdot 72°, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

.

3. Ställ upp systemet på matrisform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicera med transponatet till den vänstra sidans 3×2 matris från vänster i båda led.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss normalekvationen

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Mha Gausselimination får vi fram lösningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

4. Här väljer man vektorn $v_1 = u$ som första vektor i den nya basen (Normering går vi på slutet). Sedan behöver vi två nya vektorer. För att hitta de övriga så kan man ta nästan vilka två vektorer som helst och använda Gram-Schmidts metod. Man kan starta med två av standardbasvektorerna. Tar man $a_2 = (1,0,0)$ och $a_3 = (0,1,0)$ så får man den ortogonala basen:

$$o_1 = \frac{1}{2}(1,1,\sqrt{2}), \quad o_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}(3,-1,\sqrt{2}), \quad o_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,2,-\sqrt{2})$$

Men det finns andra möjligheter: vi kan välja de övriga två nästan som vi vill men de måste vara vinkelräta mot färdriktningen och mot varandra. Vi kan t.ex. börja med att ta $v_2 = (1,-1,0)$ som andra vektor (man ser lätt att denna är ortogonal mot v_1). Den tredje vektorn kan vi i princip ta vilken vektor som helst och använda Gram-Schmidts metod för att göra om den så den blir ortogonal mot v_1 och v_2. Men är man riktigt på hugget kan man kanske se att $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ är vinkelrät mot både v_1 och v_2 och i så fall är vi klara när vi normaliserat de tre vektorerna.

5. Gauss-Jordan elimination ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vilket ger oss att

(a) En bas för radrummet är de tre nollskilda raderna i denna eliminerade matris

(b) Eftersom pivotelementen befinner sig i kolonn 1, 2 och 3 så är dessa kolonner i matrisen B en bas för kolonnrummet.

(c) För nollrummet så får vi att $x_1 = -x_5$ och $x_2 = -x_4$, $x_3 = 0$ och eftersom de två sista variablerna är fria så sätter vi $x_4 = s$ och $x_5 = t$ vilket ger oss att nollrummet ges av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{basvektor}} s + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{basvektor}} t,$$

6. Vi beräknar determinanten till A mha kofaktorutveckling och får då att $\det A = -12$.

För att beräkna $\det B$ så noterar vi att B fås från A genom att byta plats på två rader. Detta innebär att $\det B = -\det A = 12$.

Matrisen C är A's transponat vilket ger att $\det C = \det A = -12$.

7. Egenvärden :: Det karakteristika polynomet $c(\lambda) = \det(E - \lambda I)$ blir

$$0 = \det(E - \lambda I) = \underbrace{-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1}_{\text{det karakteristiska polynomet}} = -(\lambda - 5)(\lambda + 1)^2$$

Här har vi alltså fått egenvärdena 5 som är ett enkelt egenvärde och -1 som är dubbelt.

Diagonaliserbarhet :: Matrisen är symmetrisk och sådana är automatiskt diagonaliserbara.

Diagonal matris :: Den diagonala matrisen har egenvärdena på diagonalen. Notera ordningen som måste följas nedan när vi ställer upp den diagonaliserande matrisen via motsvarande egenvektorer.

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer :: Här måste man lösa $(E - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för alla egenvärden.

$\lambda = 5$ **::** Vi måste lösa $(E - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Vi får då att matrisen till vänster (vi skriver alltså inte upp högerledet vilket är onödigt eftersom det inte kommer förändras (eftersom det är noll) när vi utför rad-operationerna.) blir som då Gauss-Jordan elimineras

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{Gauss-Jordan ger} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss egenrummet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_1}} t$$

$\lambda = -1$ **::** Här ska vi få ett tvådimensionellt egenrum eftersom matrisen är symmetrisk och egenvärdet har algebraisk multiplicitet 2.

Vi måste lösa $(E + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$::

Vi får då att matrisen till vänster (vi skriver alltså inte upp högerledet vilket är onödigt eftersom det inte kommer förändras (eftersom det är noll) när vi utför rad-operationerna.) blir som då Gauss-Jordan elimineras

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Gauss-Jordan ger} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss att x är ledande variabel och både y och z är fria. Vi får från matrisen att $x = -y - z$ och detta ger oss följande parameterbeskrivning av egenrummet::

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_2}} s + = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_3}} t$$

Diagonaliserande matris :: Vi ställer upp egenvektorerna som kolonner i en matris och får då en diagonaliserande[2] matris.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[2]Observera att båda dessa egenvektorer är ortogonala mot $\mathbf{e_1}$ men inte mot varandra. Man kan dock använda Gram-Schmidts metod för att göra dom ortogonala mot varandra och då kan man få fram en Ortonormal (om man också normerar alla tre vektorer) uppsättning egenvektorer som sedan ger en ortogonal diagonaliserande matris, vilket ofta är fördelaktigt.

8. Vi använder determinanten för att avgöra de värden på t som gör att matrisen är inverterbar. Determinanten blir

$$c^2 + 2c + 1$$

som har det dubbla nollstället $c = -1$. Dessa värden gör att matrisen saknar invers.

Det minsta positiva heltalsvärdet på c som ger oss en inverterbar matris är därför $c = 1$ och för detta värde så blir matrisens invers

$$A(1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$