TM-Matematik
Sören Hector :: 070-4616086
Mikael Forsberg :: 0734-412331

kurser::
LINJÄR ALGEBRA MA014A
MATEMATIK FÖR INGENJÖRER MA031A
2012 05 04

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 3y + 2z &= 2 \quad (1)\\ 4x - 2y + 2z &= 2 \quad (2)\\ -3x + 5y + z &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

2. (a) Bestäm storleken (absolutbeloppet) och argumentet till $z = 2 + i$. [1 poäng]
   (b) Uttryck som z=a+bi, då $|z| = 9$ och $\arg z = 7\pi/4$. [1 poäng]
   (c) Förenkla $\frac{2+i}{1-2i}$. [1 poäng]
   (d) Lös ekvationen $z^2 = i$ [2 poäng]

3. Lös det överbestämda systemet nedan på bästa sätt i minsta kvadratmening

$$\begin{aligned} x + y &= 1\\ x + 2y &= 3\\ x + 3y &= 4\\ x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

4. Bestäm projektionen av vektorn $a = (1, 1, 1)$ på planet P som definieras av ekvationen $x + y = 0$

5. Beräkna baser för rad, kolonn och nollrum för följande matris

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & -2 & -2\\ -2 & -2 & 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Beräkna determinanten till följande matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Är matrisen diagonaliserbar? Om matrisen är diagonaliserbar beräkna den diagonala matrisen och den diagonaliserande matrisen.

8. Låt

$$A[t] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & t & 1 \\ t & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm de värden på parametern t som gör att matrisen saknar invers.

(b) Beräkna inversen till matrisen för det minsta positiva heltalsvärde på t som gör att matrisen är inverterbar.

Svar till tentamen i Linjär Algebra ma014a, 2012 05 04.

1. $(0,0,1)$

2. (a) $|z| = \sqrt{5}$, $\arg z = \tan^{-1} 1/2$

   (b) $z = 9(\cos 7\pi/4 + i \sin 7pi/4) = 9(\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2 = \frac{9}{\sqrt{2}} - i\frac{9}{\sqrt{2}}$

   (c) $\frac{4i}{5}$

   (d) beloppet:: $|z] = 1$, argumentet:: $\arg z = \pi/4 + k \cdot \pi$, $k = 0, 1$. M.a.o. :: $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

3. $x = -1/2$, $y = 8/5$

4. $(0,0,1)$

5. Se lösningen.

6. $\det A = -532$

7. Eigensystem[E]

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ \{1,1,1\} & \{-1,0,1\} & \{-1,1,0\} \end{pmatrix}$$

8. (a) Matrisen saknar invers om $t = -5/2$ och om $t = 2$.

   (b) Det minsta positiva heltalet som gär att $A(c)$ har invers är 1 och vi får

$$A(1)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -5 & -4 & -6 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra ma014a, 2012 05 04.

1. Ställ upp på matrisform och radreducera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Vi läser direkt av lösningen $(0, 0, 1)$

2.

3. Ställ upp systemet på matrisform

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Multiplicera med transponatet till den vänstra sidans 3×2 matris från vänster i båda led.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss normalekvationen

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 43 \end{bmatrix}$$

Mha Gausselimination får vi fram lösningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

4. Planet har normalvektorn $n = (1, 1, 0)$. För att beräkna projektionen av vektorn a på planet så är det enklast att subtrahera projektionen av a på normalvektorn från a. VI har

$$b = \mathbf{proj}_n a = \frac{a \bullet n}{||n||^2} n = \frac{2}{2}(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$$

Detta visar sig att normalvektorn råkar precis vara projektionen av a längs normalriktningen. Vi får nu att projektionen i planet P blir

$$\mathbf{proj}_P a = a - b = (1, 1, 1) - (1, 1, 0) = (0, 0, 1)$$

5. GaussJordan eliminering av B ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket ger att de tre nollskillda raderna är bas för radrummet. Kolonnrummet har en bas som består av de tre första kolonnerna i matrisen B. Nollrummets bas får vi från den gausseliminerade matrisen (om man vill utvidgad med ett högerled som består av nollor) Om vi kallar variablerna för $x_1, \ldots, x_5$ så får vi att $x_4 = s$ och $x_5 = t$ är fria variabler och kan alltså ges av parametrarna s och t som vi just definierade. Vi uttrycker de övriga variablerna mha dessa parametrar och får därför att nollrummet beskrivs av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{basvektor}} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{basvektor}} t,$$

där de båda vektorerna i höger led är basvektorerna för nollrummet.

6. Använd kofaktorutveckling längs den fjärde kolonnen, vilket ger

$$\det A = (-3) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{=124} - 2 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=80} =$$

$$= -3 \cdot 124 - 2 \cdot 80 = -372 - 160 = -532$$

7. Egenvärden :: Det karakteristika polynomet $c(\lambda) = \det(E - \lambda I)$ blir

$$0 = \det(E - \lambda I) = \underbrace{-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20}_{\text{det karakteristiska polynomet}} = -(\lambda - 5)(\lambda - 2)^2$$

Här har vi alltså fått egenvärdena 5 som är ett enkelt egenvärde och 2 som är dubbelt.

Diagonaliserbarhet :: Matrisen är symmetrisk och sådana är automatiskt diagonaliserbara.

Diagonal matris :: Den diagonala matrisen har egenvärdena på diagonalen. Notera ordningen som måste följas nedan när vi ställer upp den diagonaliserande matrisen via motsvarande egenvektorer.

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer :: Här måste man lösa $(E - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för alla egenvärden.

$\lambda = 5$ **::** Vi måste lösa $(E - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Vi får då att matrisen till vänster (vi skriver alltså inte upp högerledet vilket är onödigt eftersom det inte kommer förändras (eftersom det är noll) när vi utför radoperationerna.) blir som då Gauss-Jordan elimineras

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{Gauss-Jordan ger} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss egenrummet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_1}} t$$

$\lambda = 2$ **::** Här ska vi få ett tvådimensionellt egenrum eftersom matrisen är symmetrisk och egenvärdet har algebraisk multiplicitet 2.

Vi måste lösa $(E - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$::

Vi får då att matrisen till vänster (vi skriver alltså inte upp högerledet vilket är onödigt eftersom det inte kommer förändras (eftersom det är noll) när vi utför rad-operationerna.) blir som då Gauss-Jordan elimineras

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Gauss-Jordan ger} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss att x är ledande variabel och både y och z är fria. Vi får från matrisen att $x = -y - z$ och detta ger oss följande parameterbeskrivning av egenrummet::

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_2}} s + = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_3}} t$$

Diagonaliserande matris :: Vi ställer upp egenvektorerna som kolonner i en matris och får då en diagonaliserande[1] matris.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Vi använder determinanten för att avgöra de värden på t som gör att matrisen är inverterbar. Determinanten blir

$$2t^2 + t - 10$$

som har nollställena $t = -5/2$ och $t = 2$. Dessa värden gör att matrisen saknar invers.

Det minsta positiva heltalsvärdet på t som ger oss en inverterbar matris är därför $t = 1$ och för detta värde så blir matrisens invers

$$A(1)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -5 & -4 & -6 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

[1]Observera att båda dessa egenvektorer är ortogonala mot $\mathbf{e_1}$ men inte mot varandra. Man kan dock använda Gram-Schmidts metod för att göra dom ortogonala mot varandra och då kan man få fram en Ortonormal (om man också normerar alla tre vektorer) uppsättning egenvektorer som sedan ger en ortogonal diagonaliserande matris, vilket ofta är fördelaktigt.