HÖGSKOLAN I GÄVLE
TM-Matematik
Sören Hector :: 070-4616086
Mikael Forsberg :: 0734-412331

kurser::
LINJÄR ALGEBRA MA014A
MATEMATIK FÖR INGENJÖRER MA031A
2012 08 15

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= -1 && (1)\\ 2x + y - 2z &= -3 && (2)\\ -x + 3y - z &= 4 && (3) \end{aligned}$$

2. (a) Bestäm storleken (absolutbeloppet) och argumentet till $z = 1 + i$. [1 poäng]
   (b) Uttryck som $z = a + bi$, då $|z| = 5$ och $\arg z = -\pi/3$. [1 poäng]
   (c) Förenkla $\frac{3-i}{1-3i}$. [1 poäng]
   (d) Lös ekvationen $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$ [2 poäng]

3. Bestäm den räta linje som, i minsta kvadratmening bäst anpassar sig till punkterna $(1, 2), (2, 3), (3, 3)$ och $(4, 5)$.

4. Bestäm projektionen av vektorn $u = (2, 1, 1)$ på planet P som spänns av vektorerna $b_1 = (1, -1, 0)$ och $b_2 = (1, 1, 0)$.

5. Beräkna baser för rad, kolonn och nollrum för följande matris

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Beräkna determinanten till följande matris

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

7. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Är matrisen diagonaliserbar? Om matrisen är diagonaliserbar beräkna den diagonala matrisen och den diagonaliserande matrisen.

8. Bestäm de värden på parametern c som gör att systemet $A(c)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A(c) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & c & 2 \\ -1 & -4 & c \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

(a) en unik lösning

(b) oändligt många lösningar

(c) ingen lösning

Svar till tentamen i Linjär Algebra ma014a, 2012 08 15.

1. $(1, 3, 4)$

2. (a) $|z| = \sqrt{2}$,$\arg z = \pi/4$

   (b) $z = 5(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) = 5/2 - 5i\sqrt{3}/2$

   (c) $6/10 + 8i/10$

   (d) $|z| = 2, \quad \arg z = \pi/3 + k \cdot \pi, \quad k = 0, 1$

   Dessa lösningar kan också skrivas som $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$

3. $y = -3x/10 + 9/2$

4. $(2, 1, 0)$

5. Se lösningen.

6. $\det B = 380$

7. Eigensystem[E]

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ (1,1,1) & (-1,0,1) & (-1,1,0) \end{pmatrix}$$

8. (a) $1 \neq c \neq -7$ ger oss system med unik lösning.

   (b) $t = 1$ ger ett system som har många lösningar.

   (c) $t = -7$ ger ett system som saknar lösningar.

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra ma014a, 2012 08 15.

1. Skriv systemet på matrisform och radreducera::

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

från vilket vi utläser

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. (a) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Argumentet blir $\arg z = \pi/4$, vilket enklast utläses om vi ritar upp $1+i$ i det komplexa talplanet. Alternativt kan man uttrycka det som $\arg z = \arctan 1$, men man behöver troligen för att få fram vinkeln...

(b) $z = 5(\cos(-\pi/3) + i \sin(-\pi/3)) = 5/2 - 5i\sqrt{3}/2$

(c) Man förlänger, dvs multiplicerar uppe och nere, med nämnarens konjugat:

$$\frac{3-i}{1-3i} = \frac{(3-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{6+8i}{10} = 6/10 + 8i/10$$

(d) Börja med att ställa upp ekvationen på polär form, där vi noterar att

$$|-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} e^{2\pi/3 + 2\pi k} = 2e^{2\pi/3+2\pi k}$$

Vi får

$$(|z|e^{i\theta})^2 = |z|^2 e^{2i\theta} = 2e^{2\pi/3+2\pi k}$$

Detta ger oss en ekvation för beloppet:

$$|z|^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{2}$$

och en ekvation för argumentet

$$e^{2i\theta} = e^{(2\pi/3+2\pi k)i} \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi/3 + \pi k, \quad k = 0, 1$$

Vi får alltså argumenten $\pi/3$ och $4\pi/3$ och lösningarna blir därför

$$z = \sqrt{2}e^{i\pi/3} = \sqrt{2}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

och

$$z = \sqrt{2}e^{i4\pi/3} = z = \sqrt{2}e^{i\pi/3} \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} = -\sqrt{2}e^{i\pi/3} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

3. Vi har räta linjens ekvation $m + kx = y$. Varje punkt ger x-y-värden och insatt i räta linjens ekvation så ger varje punkt ett villkor i koeffecienterna k och m. De fyra punkterna ger därför följande matrisekvation

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Vi ställer upp normalekvationen genom att multiplicera med den vänstra matrisens transponat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

och får alltså normalekvationen

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$$

som har lösningen

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 \\ -3/10 \end{bmatrix}$$

4. Vektorerna som spänner upp planet är ortogonala och då kan vi använda en projektionssats som säger att projektionen på planet är summan av projektionerna $\mathbf{proj}_{b_1} u$ och $\mathbf{proj}_{b_2} u$.

Se **Lay Ed 4** Theorem 5 i kapitel 6.2

Vi har alltså

$$\begin{aligned}
\mathbf{proj}_P u &= \mathbf{proj}_{b_1} u + \mathbf{proj}_{b_2} u = \frac{u \bullet b_1}{||b_1||^2} b_1 + \frac{u \bullet b_2}{||b_2||^2} b_2 = \\
&= \frac{(2,1,1) \bullet (1,-1,0)}{2}(1,-1,0) + \frac{(2,1,1) \bullet (1,1,0)}{2}(1,1,0) = \frac{1}{2}(1,-1,0) + \frac{3}{2}(1,1,0) = \\
&= (2,1,0)
\end{aligned}$$

5. GaussJordan eliminering av B ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{21} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{11}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket ger att de tre nollskillda raderna är bas för radrummet. Kolonnrummet har en bas som består av de tre första kolonnerna i matrisen B. Nollrummets bas får vi från den gausseliminerade matrisen (om man vill utvidgad med ett högerled som består av nollor) Om vi kallar variablerna för $x_1, \ldots, x_5$ så får vi att $x_4 = s$ och $x_5 = t$ är fria variabler och kan alltså ges av parametrarna s och t som vi just definierade. Vi uttrycker de övriga variablerna mha dessa parametrar och får därför att nollrummet beskrivs av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{basvektor}} s + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{2}{7} \\ \frac{8}{21} \\ \frac{11}{21} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{basvektor}} t,$$

där de båda vektorerna i höger led är basvektorerna för nollrummet.

6. Kofaktorutveckling längs den tredje kolonnen ger att determinanten till vår matris blir

$$\det B = -(-2) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & -5 & -3 \end{pmatrix} = -2 \cdot 190 = 380$$

7. Egenvärden :: Det karakteristika polynomet $c(\lambda) = \det(E - \lambda I)$ blir

$$0 = \det(E - \lambda I) = \underbrace{-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4}_{\text{det karakteristiska polynomet}} = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$$

Här har vi alltså fått egenvärdena 4 som är ett enkelt egenvärde och 1 som är dubbelt.

Diagonaliserbarhet :: Matrisen är symmetrisk och sådana är automatiskt diagonaliserbara.

Diagonal matris :: Den diagonala matrisen har egenvärdena på diagonalen. Notera ordningen som måste följas nedan när vi ställer upp den diagonaliserande matrisen via motsvarande egenvektorer.

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer :: Här måste man lösa $(E - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för alla egenvärden.

$\lambda = 4$ **::** Vi måste lösa $(E - 4I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Vi får då att matrisen till vänster (vi skriver alltså inte upp högerledet vilket är onödigt eftersom det inte kommer förändras (eftersom det är noll) när vi utför radoperationerna.) blir som då Gauss-Jordan elimineras

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{Gauss-Jordan ger} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss egenrummet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_1}} t$$

$\lambda = 1$ **::** Här ska vi få ett tvådimensionellt egenrum eftersom matrisen är symmetrisk och egenvärdet har algebraisk multiplicitet 2.

Vi måste lösa $(E - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$::

Vi får då att matrisen till vänster (vi skriver alltså inte upp högerledet vilket är onödigt eftersom det inte kommer förändras (eftersom det är noll) när vi utför radoperationerna.) blir som då Gauss-Jordan elimineras

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Gauss-Jordan ger} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss att x är ledande variabel och både y och z är fria. Vi får från matrisen att $x = -y - z$ och detta ger oss följande parameterbeskrivning av egenrummet::

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_2}} s + = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{egenvektor } \mathbf{e_3}} t$$

Diagonaliserande matris :: Vi ställer upp egenvektorerna som kolonner i en matris och får då en diagonaliserande[1] matris.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Beräkna först matrisens determinant:

$$\det A(t) = 2t^2 + 12t - 14 = 2(t^2 + 6t - 7)$$

som blir noll om $c = 1$ eller om $c = -7$. Dessa två värden gör att matrisen saknar invers vilket innebär att för dessa värden så får vi ett system som antingen saknar lösningar eller har många lösningar.

(a) Om $1 \neq c \neq -7$ så får vi system som är unikt lösbara.

(b) För $c = 1$ så får vi följande utvidgade system som gausselimineras så att den får en nollrad:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & -\frac{7}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta betyder att systemet har en fri variabel och därför oändligt många lösningar.

(c) Om $c = -7$ får vi följande utvidgade matris som gausselimineras så att vi ser att det är inkonsistent:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & -7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Observera att båda dessa egenvektorer är ortogonala mot $\mathbf{e_1}$ men inte mot varandra. Man kan dock använda Gram-Schmidts metod för att göra dom ortogonala mot varandra och då kan man få fram en Ortonormal (om man också normerar alla tre vektorer) uppsättning egenvektorer som sedan ger en ortogonal diagonaliserande matris, vilket ofta är fördelaktigt.