HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
026-64 89 61

Matematik med datalogi, mfl.
LINJÄR ALGEBRA
ma014a
2012 11 01

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Lös ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

2. (a) Beräkna absolutbeloppet och argumentet till $z = -3 + 2i$
   (b) Om $|z| = 3$ och $\arg z = -\pi/6$ skriv z på rektangulär form $z = a + bi$.
   (c) Förenkla $\frac{3i-9}{3i+1}$
   (d) Lös $(z-1)^4 - 1 = 0$

3. Beräkna matrisen för den avbildning som först speglar alla vektorer i planet i x-axeln och sedan roterar vektorerna moturs $\pi/2$. Identifiera vad denna avbildgningsmatris betyder geometriskt för vektorerna i planet.

I de följande två uppgifterna (uppgift 4 och 5) så låter vi $W = Col(A)$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och } \mathbf{b} = (1, 1, 1)$$

och **b**

4. Beräkna projektionen av **b** i W genom att först beräkna en ON-bas mha Gram-Schmidts metod.
5. Beräkna projektionen av **b** i W genom att använd minsta kvadratmetoden.
6. Beräkna baser för radrum, kolonnrum och nollrum till matrisen

$$M_6 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Låt

$$A[t] = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & t & -1 \\ 3 & -6 & t \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna de värden på t som gör att systemet $A(t)\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(a) har en unik lösning.

(b) saknar lösning

(c) har oändligt många lösningar.

8. Beräkna egenvärden och egenvektorer till följande matris. Beräkna en diagonaliserande matris om det är möjligt att diagonalisera matrisen.

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 5 & 0 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Svar till tentamen i Linjär algebra, 2012 11 01.

1.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

3.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

som vi kan identifiera som en spegling i linjen $y = x$.

4.

5.

6.

7. (a) Systemet har unik lösning för alla t utom $t = -2$ och $t = -3$

(b) För $t = -2$ och $t = -3$ så är systemet inkonsistent och saknar lösning.

(c) Det finns inga värden på t som gör att systemet får oändligt många lösningar.

8.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, 2012 11 01.

1. Ställ upp den utvidgade matrisen och Gausseliminera

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

från vilket vi ser att $z = t$ är en fri variabel och för de övriga variablerna så får vi att $y = -t + 1$ (från rad 2) och $x = -2t + 1$ från rad 1: Vi får m.a.o

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

3. Mha av bilden så ser vi att avbildningen verkar på standardbasvektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Från detta får vi alltså direkt att matrisen för avbildningen blir

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

som vi kan identifiera som en spegling i linjen $y = x$.

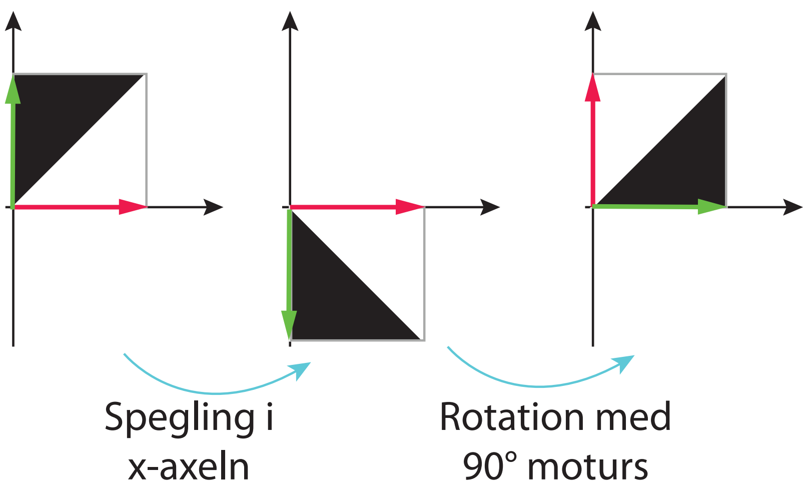

Figure 1: Bild till uppgift 3 som illustrerar vad som händer med standardbasvektorerna då vi först speglar i x-axeln och sedan roterar med $\pi/2$, dvs rotation med 90°.

4. Vi börjar med att beräkna en bas. Här väljer vi att nyttja att $Col(A) = Row(A^T)$ och då kan vi beräkna en bas för W genom att radeliminera A^T:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så vi ser att vektorerna $\bar{v}_1 = (1,0,1)$ och $\bar{v}_2 = (0,1,1)$ bildar en bas för kolonnrummet. Dessa vektorer är dock inte ortogonala så vi använder Gram-Schmidts metod för att skapa oss en ortogonal bas $\{\bar{o}_1, \bar{o}_2\}$: Vi väljer $\bar{o}_1 = \bar{v}_1 = (1,0,1)$ och då får vi att vi $\bar{o}_2$ blir

$$\bar{o}_2 = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2 \bullet \bar{o}_1}{||\bar{o}_1||^2}\bar{o}_1 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \frac{1}{2}[(0,2,2) - (1,0,1)] = \frac{1}{2}(-1,2,1)$$

En ortonormal bas får vi nu genom normering:

$$\mathbf{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \qquad \mathbf{e_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)$$

Projektionen av vektorn $\mathbf{b} = (1,1,1)$ till W blir nu

$$\begin{aligned} \mathbf{proj}_W \mathbf{b} &= \underbrace{(\mathbf{b} \bullet \mathbf{e_1})}_{=\sqrt{2}} \mathbf{e_1} + \underbrace{(\mathbf{b} \bullet \mathbf{e_2})}_{=2/\sqrt{6}} \mathbf{e_2} = \\ &= (1,0,1) + \frac{1}{3}(-1,2,1) = \frac{1}{3}(3,0,3) + (-1,2,1) = \frac{1}{3}(2,2,4) \end{aligned}$$

5. Här ställer vi direkt upp normalekvationen

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}, \quad \text{där} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Som på matris form blir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 7 & 7 & 6 \\ 7 & 14 & -7 & 2 \\ 7 & -7 & 14 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{10}{21} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som ger oss lösningarna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{10}{21} \\ -\frac{2}{21} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Här duger vilken som helst av dessa lösningar och enklast är att ta $t = 0$ så att den vektor som anger projektionens linjärkombination av kolonnvektorerna är

$$\mathbf{x_o} = \begin{bmatrix} \frac{10}{21} \\ -\frac{2}{21} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Projektionen får vi genom att utföra multiplikationen $A \cdot \mathbf{x_o}$:

$$A\mathbf{x_o} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6. Börja med att radeliminera matrisen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Från detta får vi att de tre första raderna i den reducerade matrisen är en bas för radrummet. Eftersom pivotelementen står i kolonn 1, 2 och 3 så är dessa tre kolonner i M_6 en bas för kolonnrummet.

En bas för nollrummet får vi genom att lösa $M_6\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi får då att $x_4 = s$ och $x_5 = t$ är fria variabler och då kan nollrumet skrivas som

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

där de två vektorerna bildar nollrummets bas.

7. Vi börjar med att beräkna matrisens determinant och får då

$$\det A(t) = -2t^2 - 10t - 12 = -2(t^2 + 5t + 6) = -2(t+2)(t+3)$$

där faktoriseringen i det sista steget gjordes genom att beräkna andragradspolynomets nollställen som blir $t = -2$ och $t = -3$. Dessa två värden gör att matrisen saknar invers. Alla andra värden på t gör alltså att $A(t)$ har en invers och då kan vi uttrycka systemets unika lösning som

$$\mathbf{x} = A(t)^{-1}\mathbf{b}, \quad t \neq -2, t \neq -3.$$

När $t = -2$ eller $t = -3$ så har systemet antingen oändligt många lösningar eller så saknas det lösningar. För att ta reda på vilket som gäller så behöver vi lösa systemet för dessa två värden. Vi får:

$t = -2$**:** Systemet blir då på matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Detta system är uppenbarligen inkonsistent så systemet saknar alltså lösningar då $t = -2$

$t = -3$**:** Systemet blir då på matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Detta system är uppenbarligen inkonsistent så systemet saknar alltså lösningar då $t = -3$

För båda våra värden så blir alltså systemet inkonsistent vilket betyder att inget värde på t ger oss ett system med oändligt många lösningar.

8. Egenvärden: 1,2,3

Egenvektorer/Diagonaliserande matris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$