

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.

Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Lös ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

2. (a) Beräkna absolutbeloppet och argumentet till $z = -3 + 2i$

(b) Om $|z| = 3$ och $\arg z = -\pi/6$ skriv z på rektangulär form $z = a + bi$.

(c) Förenkla $\frac{3i-9}{3i+1}$

(d) Lös $(z-1)^4 - 1 = 0$

3. Beräkna matrisen för den avbildning som först speglar alla vektorer i planet i x -axeln och sedan roterar vektorerna moturs $\pi/2$. Identifiera vad denna avbildningsmatris betyder geometriskt för vektorerna i planet.

I de följande två uppgifterna (uppgift 4 och 5) så låter vi $W = \text{Col}(A)$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = (1, 1, 1)$$

och \mathbf{b}

4. Beräkna projektionen av \mathbf{b} i W genom att först beräkna en ON-bas mha Gram-Schmidts metod.

5. Beräkna projektionen av \mathbf{b} i W genom att använd minsta kvadratmetoden.

6. Beräkna baser för radrum, kolonnrum och nollrum till matrisen

$$M_6 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Låt

$$A[t] = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & t & -1 \\ 3 & -6 & t \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna de värden på t som gör att systemet $A(t)\mathbf{x} = \mathbf{b}$

- (a) har en unik lösning.
- (b) saknar lösning
- (c) har oändligt många lösningar.

8. Beräkna egenvärden och egenvektorer till följande matris. Beräkna en diagonaliserande matris om det är möjligt att diagonalisera matrisen.

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 5 & 0 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Svar till tentamen i Linjär algebra, 2012 11 01.

1.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

3.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

som vi kan identifiera som en spegling i linjen $y = x$.

4.

5.

6.

7. (a) Systemet har unik lösning för alla t utom $t = -2$ och $t = -3$

(b) För $t = -2$ och $t = -3$ så är systemet inkonsistent och saknar lösning.

(c) Det finns inga värden på t som gör att systemet får oändligt många lösningar.

8.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, 2012 11 01.

1. Ställ upp den utvidgade matrisen och Gausseliminera

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

från vilket vi ser att $z = t$ är en fri variabel och för de övriga variablerna så får vi att $y = -t + 1$ (från rad 2) och $x = -2t + 1$ från rad 1: Vi får m.a.o

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

3. Mha av bilden så ser vi att avbildningen verkar på standardbasvektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Från detta får vi alltså direkt att matrisen för avbildningen blir

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

som vi kan identifiera som en spegling i linjen $y = x$.

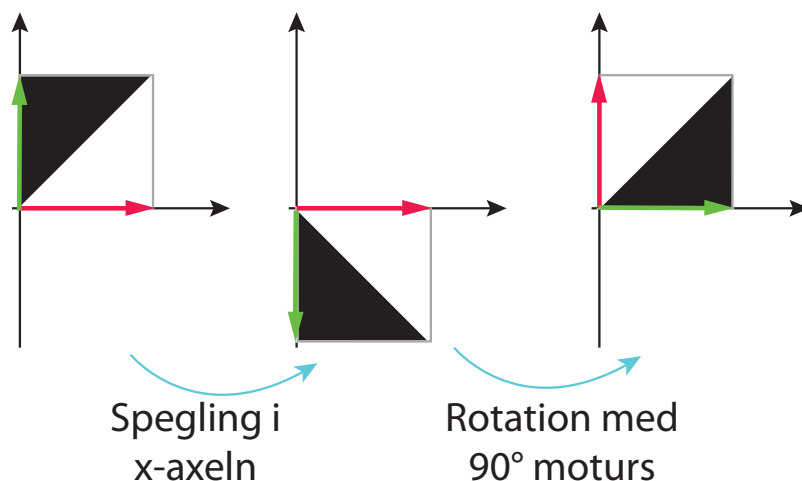


Figure 1: Bild till uppgift 3 som illustrerar vad som händer med standardbasvektorer då vi först speglar i x -axeln och sedan roterar med $\pi/2$, dvs rotation med 90° .

4. Vi börjar med att beräkna en bas. Här väljer vi att nyttja att $Col(A) = Row(A^T)$ och då kan vi beräkna en bas för W genom att radeliminera A^T :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så vi ser att vektorerna $\bar{v}_1 = (1, 0, 1)$ och $\bar{v}_2 = (0, 1, 1)$ bildar en bas för kolonnrummet. Dessa vektorer är dock inte ortogonala så vi använder Gram-Schmidts metod för att skapa oss en ortogonal bas $\{\bar{o}_1, \bar{o}_2\}$: Vi väljer $\bar{o}_1 = \bar{v}_1 = (1, 0, 1)$ och då får vi att vi \bar{o}_2 blir

$$\bar{o}_2 = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{o}_1}{\|\bar{o}_1\|^2} \bar{o}_1 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, 1) = \frac{1}{2}[(0, 2, 2) - (1, 0, 1)] = \frac{1}{2}(-1, 2, 1)$$

En ortonormal bas får vi nu genom normering:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$$

Projektionen av vektorn $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$ till W blir nu

$$\begin{aligned} \text{proj}_W \mathbf{b} &= \underbrace{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_1)}_{=\sqrt{2}} \mathbf{e}_1 + \underbrace{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_2)}_{=2/\sqrt{6}} \mathbf{e}_2 = \\ &= (1, 0, 1) + \frac{1}{3}(-1, 2, 1) = \frac{1}{3}(3, 0, 3) + (-1, 2, 1) = \frac{1}{3}(2, 2, 4) \end{aligned}$$

5. Här ställer vi direkt upp normalekvationen

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}, \quad \text{där} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Som på matris form blir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 14 & 7 & 7 & 6 \\ 7 & 14 & -7 & 2 \\ 7 & -7 & 14 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{10}{21} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

som ger oss lösningarna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{10}{21} \\ -\frac{2}{21} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Här duger vilken som helst av dessa lösningar och enklast är att ta $t = 0$ så att den vektor som anger projektionens linjärkombination av kolonnvektorerna är

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{10}{21} \\ -\frac{2}{21} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Projektionen får vi genom att utföra multiplikationen $A \cdot \mathbf{x}_0$:

$$A \mathbf{x}_0 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6. Börja med att radeliminera matrisen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Från detta får vi att de tre första raderna i den reducerade matrisen är en bas för radrummet. Eftersom pivotelementen står i kolonn 1, 2 och 3 så är dessa tre kolonner i M_6 en bas för kolonnrummet.

En bas för nollrummet får vi genom att lösa $M_6\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi får då att $x_4 = s$ och $x_5 = t$ är fria variabler och då kan nollrummet skrivas som

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

där de två vektorerna bildar nollrummets bas.

7. Vi börjar med att beräkna matrisens determinant och får då

$$\det A(t) = -2t^2 - 10t - 12 = -2(t^2 + 5t + 6) = -2(t+2)(t+3)$$

där faktoriseringen i det sista steget gjordes genom att beräkna andragradspolynomets nollställen som blir $t = -2$ och $t = -3$. Dessa två värden gör att matrisen saknar invers. Alla andra värden på t gör alltså att $A(t)$ har en invers och då kan vi uttrycka systemets unika lösning som

$$\mathbf{x} = A(t)^{-1}\mathbf{b}, \quad t \neq -2, t \neq -3.$$

När $t = -2$ eller $t = -3$ så har systemet antingen oändligt många lösningar eller så saknas det lösningar. För att ta reda på vilket som gäller så behöver vi lösa systemet för dessa två värden. Vi får:

$t = -2$: Systemet blir då på matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

Detta system är uppenbarligen inkonsistent så systemet saknar alltså lösningar då $t = -2$

$t = -3$: Systemet blir då på matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

Detta system är uppenbarligen inkonsistent så systemet saknar alltså lösningar då $t = -3$

För båda våra värden så blir alltså systemet inkonsistent vilket betyder att inget värde på t ger oss ett system med oändligt många lösningar.

8. Egenvärden: 1,2,3

Egenvektorer/Diagonaliserande matris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$