

*Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.*

1. Beräkna alla lösningar till ekvationssystemet systemet

$$\begin{cases} 2x + y + 3z &= 4, \\ -x + 2y + z &= 3 \\ 3x - 2y + z &= -1 \end{cases}$$

2. (a) Skriv  $z = -1 + \sqrt{3}i$  på polär form  
(b) Skriv  $w = 3e^{i\pi/6}$  på rektangulär form  
(c) Förenkla  $\frac{4-2i}{1-i}$ .  
(d) Beräkna alla lösningar till binomekvationen  $z^5 - 32 = 0$

3. Beräkna matrisen till den linjära avbildning som först roterar alla vektorer medurs ett kvarts varv och sedan speglar vektorerna i  $y$ -axeln.

4. Låt

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Beräkna en bas för radrummet till  $M_4$   
(b) Gör om basen till en ON-bas genom att använda Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod.

5. Beräkna med minsta kvadratmetoden den linje som bäst anpassar sig till punkterna

$$(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 6), (4, 8)$$

6. Bestäm baser för rad, kolonn och nollrum till matrisen

$$M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

7. Låt

$$M_7 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Beräkna det karakteristiska polynomet till  $M_7$
- (b) Beräkna matrisens diagonalmatris
- (c) Beräkna en matris som diagonaliserar  $M_7$

8. Låt

$$M_8(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2-t & 2 \\ 1 & 2 & -t \end{bmatrix}$$

Beräkna inversen till  $M_8(t)$  för det minsta heltalsvärdet på  $t$  som gör att matrisen är inverterbar.

Svar till tentamen i Linjär Algebra, 2012 12 03.

1.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. (a)  $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ ,  $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$  vårt tal ligger i andra kvadranten så argumentet blir  $\pi - \pi/3 = 2\pi/3$ .

(b)  $z = 3(\cos \pi/6) + i \sin(\pi/6) = 3(\sqrt{3}/2 + i\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \cdot i$

(c)  $3 + i$

(d)  $z = 2e^{i\frac{2\pi}{5}n}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4$

3.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. se lösningen

5.  $y = \frac{17}{10}k + \frac{12}{10}$

6. Se lösningen

7. (a)

$$c(\lambda) = \det(M_7 - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

(b)

$$D_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.

$$M_8^{-1}(3) = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## Lösningar till tentamen i Linjär Algebra, 2012 12 03.

1. Ställ upp på matrisform och Gausseliminera, eller som här Gauss-Jordan eliminera till den reducerade formen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Leta sedan upp fria variabler, som i detta fall blir  $z = t$  eftersom den tredje kolonnen saknar ledande element. Uttryck sedan de ledande variablerna  $x$  och  $y$  mha den fria ( $y = -t + 2$ , och  $x = -t + 1$ ) och då får man lösningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

3. Rotation medurs ett kvarts varv är rotation med vinkeln  $-\pi/2$  och ges av matrisen

$$R = \begin{bmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Spegling i y-axeln ges av matrisen

$$S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vår avbildnings matris  $M$  blir därför

$$M = S_y R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Man kan också komma fram till denna matris mera direkt genom att undersöka vad den totala avbildningen avbildar standardbasvektorerna. Om vi placerar dessa bilder som kolonner i en matris så har vi avbildningens matris.

4. Börja med att Gausseliminera matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \mathbf{v}_1 \\ \leftarrow \mathbf{v}_2 \\ \leftarrow \mathbf{r}_3 \\ \end{array}$$

Från detta ser vi att de tre första raderna är en bas. Man noterar också att rad 1 och rad 2 redan är ortogonala (kalla dem  $\mathbf{v}_1$  resp.  $\mathbf{v}_2$  och då ger Gram-Schmidts process att vi kan få en tredje ortogonal vektor  $\mathbf{v}_3$  från den tredje radvektorn (som vi kan kalla för  $\mathbf{r}_3$ ) genom

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{r}_3 - \mathbf{proj}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{r}_3 = \frac{1}{35}(-15, -1, -2, 20)$$

Man verifierar lätt att denna verkligen är ortogonal mot  $\mathbf{v}_1$  och  $\mathbf{v}_2$ .

För att få en ON-bas så behöver vi bara avsluta med att normera vektorerna

$$\begin{aligned} \mathbf{o}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 2, 1) \\ \mathbf{o}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1, 0) \\ \mathbf{o}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{70}}(-15, -1, -2, 20) \end{aligned}$$

5. Punkterna ger oss den överbestämda matrisekvationen  $MX = Y$ , där

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Ställ upp normalekvationen  $M^T M X = M^T Y$ :

$$M^T M = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}, \quad M^T Y = \begin{bmatrix} 63 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 63 \\ 10 & 5 & 23 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{17}{10} \\ 0 & 1 & \frac{12}{10} \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow k \\ \leftarrow m \end{array}$$

Detta ger att vår linje blir

$$y = \frac{17}{10}k + \frac{12}{10}$$

6. Gausseliminera, eller som här Gauss-Jordan eliminera så att vi får matrisen på reducerad form:

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -7 & 5 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

De två nollskilda raderna är en bas för radrummet. De två första kolonnerna i  $M_6$  är bas för kolonrummet. För att bestämma nollrummets bas så startar vi med den reducerade matrisen. Om vi kallar variablerna för  $x_1, x_2, x_3, x_4$  och  $x_5$  så ser vi från den reducerade matrisen att  $x_1$  och  $x_2$  är ledande medan  $x_3 = s$ ,  $x_4 = t$  och  $x_5 = u$  är fria variabler. När vi uttrycker de ledande med de fria så får vi

$$x_1 = s - 2t + u$$

$$x_2 = -s + t - 2u$$

På parameterform får vi då nollrummet som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

7. Börja med att beräkna det karakteristiska polynomet

$$c(\lambda) = \det(M_7 - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Det följer direkt att egenvärdena blir 0, 1 och 2, varför den diagonala matrisen blir

$$D_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

För att beräkna den diagonaliserande matrisen så behöver vi beräkna egenvektorerna till våra tre egenvärden. De egenvektorer vi får ställer vi upp som kolonner i en matris och denna matris är då den diagonaliserande matrisen.

**Egenvektorer till  $\lambda = 0$  ::** Vi löser  $M_7 - 0 \cdot I = 0$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{egenvektor}}} t$$

**Egenvektorer till  $\lambda = 1$  ::** Vi löser  $M_7 - 1 \cdot I = 0$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{egenvektor}}} t$$

**Egenvektorer till  $\lambda = 2$  ::** Vi löser  $M_7 - 2 \cdot I = 0$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{egenvektor}}} t$$

Den diagonaliserande matrisen blir alltså

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**8.** Börja med att beräkna determinanten till  $M_8(t)$ :

$$\det M_8(t) = t^2 - 3t + 2$$

Nollställena till determinanten (som är  $t = 1$  och  $t = 2$ ) ger oss de värden på  $t$  som gör att matrisen inte har någon invers. Vi får således att  $t = 3$  är det minsta positiva heltal som gör att matrisen har invers. För att beräkna inversen så gör vi följande uppställning och Gauss-Jordan eliminerar så att vi får identitetsmatrisen till vänster:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$