HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

Matematik med datalogi, mfl.
LINJÄR ALGEBRA
ma014a
2012 12 03

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Beräkna alla lösningar till ekvationssystemet systemet

$$\begin{cases} 2x + y + 3z &= 4, \\ -x + 2y + z &= 3 \\ 3x - 2y + z &= -1 \end{cases}$$

2. (a) Skriv $z = -1 + \sqrt{3}i$ på polär form
   (b) Skriv $w = 3e^{i\pi/6}$ på rektangulär form
   (c) Förenkla $\frac{4-2i}{1-i}$.
   (d) Beräkna alla lösningar till binomekvationen $z^5 - 32 = 0$

3. Beräkna matrisen till den linjära avbildning som först roterar alla vektorer medurs ett kvarts varv och sedan speglar vektorerna i y-axeln.

4. Låt

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Beräkna en bas för radrummet till M_4
   (b) Gör om basen till en ON-bas genom att använda Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod.

5. Beräkna med minsta kvadratmetoden den linje som bäst anpassar sig till punkterna

$$(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 6), (4, 8)$$

6. Bestäm baser för rad, kolonn och nollrum till matrisen

$$M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

7. Låt

$$M_7 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Beräkna det karakteristiska polynomet till M_7

(b) Beräkna matrisens diagonalmatris

(c) Beräkna en matris som diagonaliserar M_7

8. Låt

$$M_8(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2-t & 2 \\ 1 & 2 & -t \end{bmatrix}$$

Beräkna inversen till $M_8(t)$ för det minsta heltalsvärdet på t som gör att matrisen är inverterbar.

Svar till tentamen i Linjär Algebra, 2012 12 03.

1.
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. (a) $|z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$ vårt tal ligger i andra kvadranten så argumentet blir $\pi - \pi/3 = 2\pi/3$.

   (b) $z = 3(\cos\pi/6) + i\sin(\pi/6)) = 3(\sqrt{3}/2 + i\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\cdot i$

   (c) $3 + i$

   (d) $z = 2e^{i\frac{2\pi}{5}n}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$

3.
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. se lösningen

5. $y = \frac{17}{10}k + \frac{12}{10}$

6. Se lösningen

7. (a)
$$c(\lambda) = \det(M_7 - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

   (b)
$$D_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (c)
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.
$$M_8^{-1}(3) = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra, 2012 12 03.

1. Ställ upp på matrisform och Gausseliminera, eller som här Gauss-Jordan eliminera till den reducerade formen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Leta sedan upp fria variabler, som i detta fall blir $z = t$ eftersom den tredje kolonnen saknar ledande element. Uttryck sedan de ledande variablerna x och y mha den fria ($y = -t + 2$, och $x = -t + 1$) och då får man lösningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

3. Rotation medurs ett kvarts varv är rotation med vinkeln $-\pi/2$ och ges av matrisen

$$R = \begin{bmatrix} \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Spegling i y-axeln ges av matrisen

$$S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vår avbildnings matris M blir därför

$$M = S_y R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Man kan också komma fram till denna matris mera direkt genom att undersöka vad den totala avbildningen avbildar standardbasvektorerna. Om vi placerar dessa bilder som kolonner i en matris så har vi avbildningens matris.

4. Börja med att Gausseliminera matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \mathbf{v_1} \\ \leftarrow \mathbf{v_2} \\ \leftarrow \mathbf{r_3} \\ \end{matrix}$$

Från detta ser vi att de tre första raderna är en bas. Man noterar också att rad 1 och rad 2 redan är ortogonala (kalla dem $\mathbf{v_1}$ resp. $\mathbf{v_2}$ och då ger Gram-Schmidts process att vi kan få en tredje ortogonal vektor $\mathbf{v_3}$ från den tredje radvektorn (som vi kan kalla för $\mathbf{r_3}$) genom

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{r_3} - \mathbf{proj}_{v_1}\mathbf{r_3} - \mathbf{proj}_{v_2}\mathbf{r_3} = \frac{1}{35}(-15, -1, -2, 20)$$

Man verifierar lätt att denna verkligen är ortogonal mot $\mathbf{v_1}$ och. $\mathbf{v_2}$.

För att få en ON-bas så behöver vi bara avsluta med att normera vektorerna

$$\begin{aligned} \mathbf{o}_1 &= \frac{\mathbf{v_1}}{||\mathbf{v_1}||} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 1, 2, 1) \\ \mathbf{o}_2 &= \frac{\mathbf{v_2}}{||\mathbf{v_2}||} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2. - 1, 0) \\ \mathbf{o}_3 &= \frac{\mathbf{v_3}}{||\mathbf{v_3}||} = \frac{1}{3\sqrt{70}}(-15, -1, -2, 20) \end{aligned}$$

5. Punkterna ger oss den överbestämda matrisekvationen $MX = Y$, där

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Ställ upp normalekvationen $M^T MX = M^T Y$:

$$M^T M = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}, \quad M^T Y = \begin{bmatrix} 63 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 63 \\ & & \\ 10 & 5 & 23 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{17}{10} \\ & & \\ 0 & 1 & \frac{12}{10} \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \quad k \\ \\ \leftarrow \quad m \end{array}$$

Detta ger att vår linje blir

$$y = \frac{17}{10}k + \frac{12}{10}$$

6. Gausseliminera, eller som här Gauss-Jordan eliminera så att vi får matrisen på reducerad form:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De två nollskillda raderna är en bas för radrummet. De två första kolonnerna i M_6 är bas för kolonnrummet. För att bestämma nollrummets bas så startar vi med den reducerade matrisen. Om vi kallar variablerna för x_1, x_2, x_3, x_4 och x_5 så ser vi från den reducerade matrisen att x_1 och x_2 är ledande medan ,$x_3 = s$, $x_4 = t$ och $x_5 = u$ är fria variabler. När vi uttrycker de ledande med de fria så får vi

$$x_1 = s - 2t + u$$
$$x_2 = -s + t - 2u$$

På parameterform får vi då nollrummet som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

7. Börja med att beräkna det karakteristiska polynomet

$$c(\lambda) = \det(M_7 - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Det följer direkt att egenvärdena blir 0, 1 och 2, varför den diagonala matrisen blir

$$D_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

För att beräkna den diagonaliserande matrisen så behöver vi beräkna egenvektorerna till våra tre egenvärden. De egenvektorer vi får ställer vi upp som kolonner i en matris och denna matris är då den diagonaliserande matrisen.

Egenvektorer till $\lambda = 0$ :: Vi löser $M_7 - 0 \cdot I = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{egenvektor}}} t$$

Egenvektorer till $\lambda = 1$ :: Vi löser $M_7 - 1 \cdot I = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{egenvektor}}} t$$

Egenvektorer till $\lambda = 2$ :: Vi löser $M_7 - 2 \cdot I = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{egenvektor}}} t$$

Den diagonaliserande matrisen blir alltså

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Börja med att beräkna determinanten till $M_8(t)$:

$$\det M_8(t) = t^2 - 3t + 2$$

Nollställena till determinanten (som är $t = 1$ och $t = 2$ ger oss de värden på t som gör att matrisen inte har någon invers. Vi får således att $t = 3$ är det minsta positiva heltal som gör att matrisen har invers. För att beräkna inversen så gör vi följande uppställning och Gauss-Jordan eliminerar så att vi får identitetsmatrisen till vänster:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$