HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734 41 23 31

Distansstuderande, Lärare och Ingenjörer

LINJÄR ALGEBRA
ma014a
2013 02 25

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.
Varje uppgift ger maximalt 5 poäng

1. Hitta alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 1 \\ -2x + y + 3z &= 5 \\ 2x - y - 3z &= -5 \end{aligned}$$

2. (a) Skriv det komplexa talet $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ på rektangulär form.
   (b) Skriv det komplexa talet $\frac{5+5i}{2-i}$ på formen $a + bi$.
   (c) Lös ekvationen $z^5 = 1 - i\sqrt{3}$

3. Beräkna matrisen för den avbildning som först roterar alla vektorer ett kvarts varv medurs och sedan speglar vektorerna i x-axeln. Vilken geometrisk operation svarar den resulterande avbildningen mot?

4. Beräkna den räta linje som bäst anpassar sig till mätpunkterna

x	-3	-1	1	3	5
y	2	1	1	0	-3

Table 1: x och y koordinater för ”mätpunkterna”

5. Beräkna baser för radrum, kolonnrum och nollrum till matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Beräkna volymen som spänns upp av de tre vektorerna $(3, 1, -1)$, $(2, -3, 1)$ och $(1, 2, 3)$. Beräkna arean spänns upp av de två första vektorerna.

7. Bestäm värde på parametern b så att följande system är konsistent.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & b \\ 1 & 2 & 2 & 2b \\ 1 & -1 & -3 & b+1 \end{array}\right)$$

8. Beräkna alla egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A_7 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Svar till tentamen i Linjär Algebra, 2013 02 25.

1.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) $1 + i$

   (b) $1 + 3i$

   (c) $z = \sqrt[5]{2}e^{i(-\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}k)}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

3. Matrisen blir
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. $y = -\frac{11}{20}x + \frac{3}{4}$.

5. Se lösningen!

6. Volymen är 45 och arean är $5\sqrt{6}$

7. $b = -1/2$

8. Egenvärdena blir 4 (enkelt) och 6 (dubbelt). Exempel på egenvektorer är kolonnerna i matrisen P. Egenrummet till $\lambda = 6$:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Egenrummet till $\lambda = 4$:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra, 2013 02 25.

1. Systemet på matrisform blir som vi radreducerar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

från vilket vi ser att $z = t$ är fri och att vi då får lösningarna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(\underbrace{\cos \pi/4}_{1/\sqrt{2}} + i \underbrace{\sin \pi/4}_{1/\sqrt{2}}) = 1 + i$

(b) $1 + 3i$

(c) $z = \sqrt[5]{2}e^{i(-\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}k)}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

3. Rotationen ger oss matrisen

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Speglingen ger oss matrisen

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Den sammansatta avbildningen blir följande produkt

$$S \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Man kan också komma fram till denna matris genom att rita bilder.

4. (x, y) koordinaterna i den angivna tabellen tänks ligga på en rät linje $y = kx + m$ Detta ger upphov till följande överbestämda matrissystem:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}}_{=M} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}}_{=y}$$

Genom att multiplicera denna ekvation från vänster i båda led med transponatet till matrisen M så överförs ekvationen till dess normalform:

$$M^T M \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = M^T y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 45 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalekvationen har lösningen

$$\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{20} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

vilket ger oss linjen $y = -\frac{11}{20}x + \frac{3}{4}$.

5. Vi radreducerar matrisen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}}_{=B} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{19}{27} & \frac{17}{27} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{14}{27} & -\frac{23}{27} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{27} & -\frac{1}{27} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De tre nollskilda raderna i den eliminerade matrisen är en bas för radrummet. Eftersom de ledande elementen står i kolonn 1, 2 och 3 så är dessa kolonner i ursprungsmatrisen matrisen B en bas för kolonnrummet. Från den eliminerade matrisen ser vi att de tre första variablerna x_1, x_2 och x_3 är ledande och de tre sista är fria. Sätt $x_4 = 27s$, $x_5 = 27t$ och $x_6 = 3u$så får vi att vi kan skriva nollrummet som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 14 \\ -17 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -17 \\ 23 \\ 1 \\ 0 \\ 27 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u,$$

där de tre vektorerna i höger led utgör basen för nollrummet.

6. Volymen bestäms av beloppet av determinanten till matrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

som blir $|-45| = 45$. Arean är längden av kryssprodukten av vektorerna. Kryssprodukten blir $(-2, -5, -11)$ och denna vektors längd är $\sqrt{4 + 25 + 121} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$.

7. Eftersom vänster led är en matris som ger nollrad så måste den utvidgade matrisen också ha en nollrad vilket gäller om $2b + 1 = 0$ Gausselimination ger oss (byt först plats på rad 1 och 2 och utför sedan vanliga radoperationer...)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & b \\ 1 & 2 & 2 & 2b \\ 1 & -1 & -3 & b+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2b \\ 0 & -3 & -5 & -3b \\ 0 & 0 & 0 & 2b+1 \end{array}\right)$$

som är konsistent precis om $b = -1/2$.

8. Det karakterisktiska polynomet

$$c(\lambda) = \det(A_7 - \lambda I) = -\lambda^3 + 16\lambda^2 - 84\lambda + 144$$

Nollställena till detta polynom är våra egenvärden som blir 4 (enkelt egenvärde) och 6 som är ett dubbelt egenvärde. Lös sedan $(A - \lambda I) = 0$ för dessa två egenvärden, detta ger baser för de båda egenrummen.

notera att $\lambda = 6$ är enkel att se (eftersom rad två blir en nollrad för detta värde) och att det blir dubbelt följer t.ex. från att egenrummet är tvådimensionellt, $\lambda = 4$ ser man också lätt eftersom man för detta värde får att första och sista raden blir lika (men motriktade

$\lambda = 6$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi får alltså att $y = s$ och $z = t$ är fria variabler och lösningarna blir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$\lambda = 4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

där $z = t$ är fri och som ger oss egenrummet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$