Problem om Basbyte

Mikael Forsberg, 18 februari 2015

Här är ett antal uppgifter, en del tagna från gamla tentamina, som handlar om basbyte.

1. Vi har baserna $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$, givna som kolonnerna till matriserna T-20140325

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Beräkna matrisen $\underset{B \leftarrow A}{P}$ som överför vektorer uttryckta i basen $\mathcal{A}$ till vektorer uttryckta i basen $\mathcal{B}$. Vad blir vektorn $[v]_{\mathcal{A}} = [1,2,1]^T_{\mathcal{A}}$ uttryckt i basen $\mathcal{B}$?

2. Beräkna den matris som överför koordinatvektorer uttryckta i basen T-20140210

$$\mathcal{A} = \{(1,1,2),(2,1,1),(1,2,1)\}$$

till koordinatvektorer uttryckta i basen $\mathcal{B} = \{(1,3,3)(,3,3,1),(3,1,3)\}$.

3. Givet en matrisekvation $AX = B$ där alla matriser är kvadratiska och har samma format så kan vi tänka oss att lösa denna genom att först beräkna inversen till A och sedan multiplicera båda led med denna från vänster. Men på samma sätt som vi beräknar inversen kan vi använda oss av Gauss-Jordan elimination av den utvidgade matrisen $(A|B)$. När vi utfört Gauss-Jordan har vi den utvidgade matrisen $(I|A^{-1}B)$. Om vi kontemplerar detta kan vi se att detta leder till en arbetsbesparing. Med samma operationer som vi beräknar A^{-1} får vi här den ihopmultiplicerade matrisen vilket är färre operationer än att först beräkna inversen och sedan utföra ihopmultiplikationen. Och detta kan användas i varje situation där vi har matriser A och B och är intresserade av produkten $A^{-1}B$. Känn efter själva. Nedan ges två matriser A och B. Beräkna $A^{-1}B$ genom

   (a) att först beräkna A^{-1} och sedan utföra matrismultiplikationen

   (b) Genom att Gauss-Jordaneliminera den utvidgade matrisen $(A|B)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Låt T-20081029

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

vara två baser för $\mathbb{R}^2$ och låt $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$ vara koordinaterna för en vektor uttryckta i basen $\mathcal{B}$. Beräkna

   (a) basbytesmatrisen som överför koordinatvektorer med avseende på basen $\mathcal{B}$ till koordinatvektorer uttryckta i basen $\mathcal{A}$

   (b) v's koordinatvektor $[v]_{\mathcal{A}}$ med avseende på basen $\mathcal{A}$

(c) Beräkna även matrisen som som överför koordinatvektorer med avseende på basen $\mathcal{A}$ till koordinatvektorer uttryckta i basen $\mathcal{B}$

5. Låt T-20081219

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

vara två baser för $\mathbb{R}^3$ och låt

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

vara koordinaterna för en vektor uttryckta i basen $\mathcal{B}$.

(a) Beräkna basbytesmatrisen som överför koordinatvektorer med avseende på basen $\mathcal{B}$ till koordinatvektorer uttryckta i basen $\mathcal{A}$

(b) Beräkna v's koordinatvektor $[v]_{\mathcal{A}}$ med avseende på basen $\mathcal{A}$

6. Kolonnerna i matriserna A och B är två baser i $\mathbb{R}^3$ T-20110506

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

Beräkna matrisen som överför koordinatvektorer uttryckta i basen B till koordinatvektorer uttryckta i basen A.

Speciellt: Uttryck koordinatvektorn[1] $[1, 2, 3]_B$ med hjälp av basen A.

[1] index indikerar att vektorn är uttryckt i basen B

Svar till tentamen i , .

1.
$$\underset{B\leftarrow A}{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2.

3.

4. (a)
$$\underset{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}$$

(c)
$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{P} = \underset{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}{P^{-1}} = \frac{5}{33}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

5. (a)
$$\underset{A\leftarrow B}{P} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

(b)
$$[v]_A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\underset{B\leftarrow A}{P} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 11 & -3 & -3 \\ -3 & 11 & -3 \\ -3 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

6.

Lösningar till tentamen i , .

1. Basbytesmatrisen $\underset{B\leftarrow A}{P}$ fås som produkten $B^{-1}A$. Denna produkt beräknas genom

$$(B|A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

vilket alltså ger oss

$$\underset{B\leftarrow A}{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Koordinaterna för v m.a.p. basen $\mathcal{B}$ blir

$$[v]_{\mathcal{B}} = \underset{B\leftarrow A}{P}[v]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Vektorerna i de båda baserna är uttryckta i standardbasen och därför blir matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriser som byter från $\mathcal{A}$ repektive $\mathcal{B}$ till standardbasen. Om vi ska överföra en vektor $[\mathbf{v}]_A$ uttryckt i basen $\mathcal{A}$ till en koordinatvektor m.a.p. basen $\mathcal{B}$ så kan vi först byta från $\mathcal{A}$ till standardbasen och sedan använda B^{-1} för att byta från standardbasen till $\mathcal{B}$. Vi får då

$$[\mathbf{v}]_B = B^{-1}A[\mathbf{v}]_A$$

och detta gör att vi ser att det är produktmatrisen $B^{-1}A$ vi ska räkna ut.

Denna kan räknas ut genom att (likt det vi gör för att beräkna inversen) ställa upp det utvidgade systemet $[B|A]$ och Gauss-Jordaneliminera tills vi har identitetsmatrisen till vänster. Produkten vi söker står då till höger. Vi får

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} & \frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{5}{14} & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

Basbytesmatrisen vi söker blir alltså

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{5}{14} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

3.

4. (a)

$$\underset{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underset{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{A}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underset{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{S}}{P} = \underset{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{A}}{P^{-1}} = \frac{-1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \underset{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{S}}{P}\,\underset{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

(b)

$$[v]_{\mathcal{A}} = \underset{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[v]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}$$

(c)

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{P} = \underset{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}{P^{-1}} = \frac{5}{33}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

5. (a) Eftersom alla vektorer i uppgiften är uttryckta med standardbasen så får vi att basbyte från dessa baser till standardbasen ges av följande matriser

$$\underset{S\leftarrow A}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \underset{S\leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Basbyte från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{A}$ får vi genom följande räkningar

$$\underset{A\leftarrow B}{P} = \underset{A\leftarrow S}{P}\underset{S\leftarrow B}{P} = \underset{S\leftarrow A}{P}^{-1}\underset{S\leftarrow B}{P} = \underset{S\leftarrow B}{P} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

där

$$\underset{S\leftarrow A}{P}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(b)

$$[v]_A = \underset{A\leftarrow B}{P}[v]_B = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(c) Basbytesmatrisen $\underset{B\leftarrow A}{P}$ som överför koordinatvektorer uttryckta i basen $\mathcal{A}$ till koordinatvektorer uttryckta i basen $\mathcal{B}$ ges av inversen till $\underset{A\leftarrow B}{P}$:

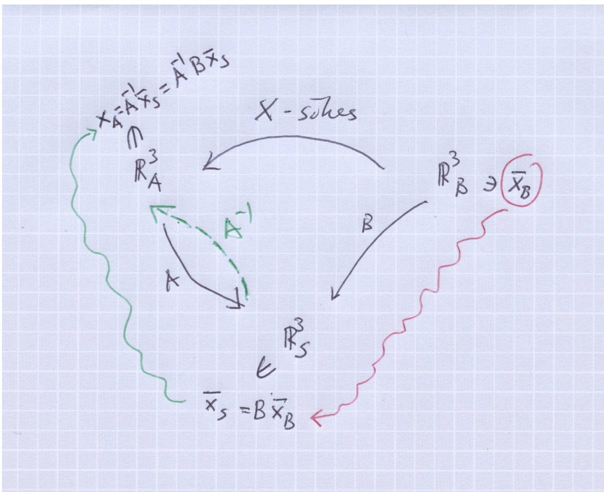
$$\underset{B\leftarrow A}{P} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 11 & -3 & -3 \\ -3 & 11 & -3 \\ -3 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

6. Matriserna A och B är båda uttryckta i standardbasen (eftersom inget annat sägs så får vi anta det) och detta innebär att de utgör basbytesmatriserna från basen A respektive B till standardbasen. Situationen är som i figur 1 M.h.a. figuren kan vi se hur vi överför från basen B till basen A, vilket ges av följande kedja:

$$x_B \quad\longmapsto\quad Bx_B = x_S \quad\longmapsto\quad A^{-1}x_S = A^{-1}Bx_B = x_A$$

Matrisen $A^{-1}B$ överför alltså koordinatvektorer m.a.p. B till koordinatvektorer m.a.p. A! Denna matrisprodukt får vi fram genom att Radreducera den utvidgade matrisen $(A|B)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$



Figur 1: *Basbytessituationen i uppgift 3. Genom att följa vektorn x_B (koordinaterna m.a.p. B för en vektor) så ser vi hur vi får fram dess koordinater m.a.p. först standardbasen S och till sist m.a.p. basen A. Från detta ser man att den sökta matrisen X måste vara $A^{-1}B$!*

vilket ger oss att vår basbytesmatris X blir

$$X = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Genom att använda denna så får vi att koordinatvektorn $x_B = [1, 2, 3]_B$ m.a.p. A ges av

$$x_A = Xx_B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}_A$$

Vår koordinatvektor blir alltså

$$x_A = \frac{1}{2}[7, 5, 3]$$