Exempel :: Basbytesmatriser

Baser och koordinater

En bas för $\mathbb{R}^n$ är en uppsättning med n stycken vektorer $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ som dels spänner upp $\mathbb{R}^n$ och dels är linjärt oberoende.

Att B spänner upp $\mathbb{R}^n$ betyder att varje vektor $\mathbf{v}$ kan skrivas

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n, \tag{1}$$

för n stycken reella tal $c_1, \ldots c_n$. Dessa tal kallas för koordinaterna för $\mathbf{v}$ m.a.p basen B. Vi skriver $\mathbf{v}_B = [c_1, \ldots, c_n]_B$ och säger att detta är koordinatvektorn för $\mathbf{v}$ med avseende på basen B.

Standardbasen

Vi har hittills använt oss av skrivsättet $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ för en reell n-dimensionell vektor. Detta skrivsätt kan vi tolka som

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n,$$

där $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ osv tills $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ utgör basvektorer i den så kallade standardbasen S. Våra vanliga n-tuppler tolkar vi alltså som koordinatvektorer med avseende på standardbasen och detta motiverar att vi skriver $\mathbf{v}_S = \mathbf{v}$.

Basbytesmatriser

Byte mellan en given bas och standardbasen

Låt oss nu betrakta ekvation (1) och göra tolkningen att alla ingående vektorer är kolonnvektorer och att dessa är uttryckta med hjälp av standardbasen. Om vi låter ${}_SP_B$ vara matrisen som har B's vektorer uttryckta i standardbasen som kolonnvektorer så kan vi skriva ekvation (1) som

$$\mathbf{v}_S = {}_SP_B\mathbf{v}_B. \tag{2}$$

Detta betyder att om vi har en koordinatvektor med avseende på basen B så kan vi överföra den till basen S (standardbasen) genom att multiplicera kolonnvektorn $\mathbf{v}_B$ med matrisen ${}_SP_B$ från vänster. För att hitta koordinatvektorn med avseende på B givet en vektor uttryckt i standardbasen (vanlig n-tuppel) så multiplicerar man denna kolonnvektor med ${}_BP_S = {}_SP_B^{-1}$ från vänster, dvs

$$\mathbf{v}_B = {}_BP_S\mathbf{v}_S = {}_SP_B^{-1}\mathbf{v}_S.$$

Vi kallar ${}_SP_B$ för basbytesmatrisen som tar koordinatvektorer m.a.p basen B till standardbasen.

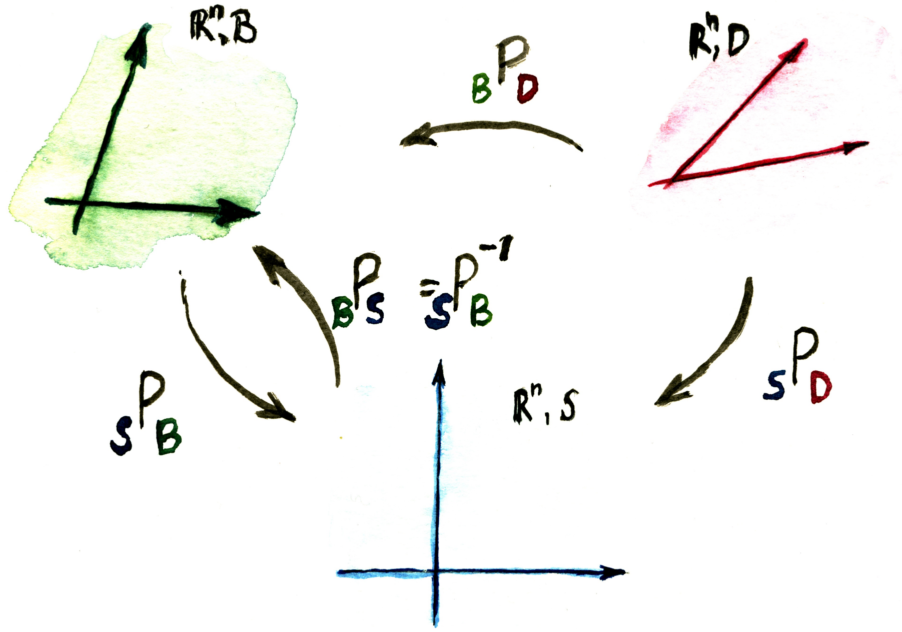
Basbyte mellan två godtyckliga baser

Låt oss förutom basen B ha en annan bas $D = \{\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n\}$. På samma sätt som för basen B, beskrivet i ovan, så får vi

$$\mathbf{v}_S = {}_SP_D\mathbf{v}_D. \tag{3}$$

Vi har nu alltså två uttryck för samma koordinatvektor $\mathbf{v}_S$ och eftersom dessa är lika så får vi systemet

$${}_SP_B\mathbf{v}_B = {}_SP_D\mathbf{v}_D. \tag{4}$$



Figur 1: *Basbyten mellan baserna B, D och standardbasen S. För att byta bas från D till B så följer man pilarna från D, via standardbasen tills vi kommer till koordinatvektorer uttryckta i basen B*

Matriserna $_SP_B$ och $_SP_D$ är inverterbara (tack vare att kolonnerna är linjärt oberoende) så är det lätt att lösa ut t.ex. koordinatvektorn m.a.p. basen B:

$$\mathbf{v}_B = {_SP_B^{-1}} {_SP_D}\mathbf{v}_D = {_BP_S}{_SP_D}\mathbf{v}_D \tag{5}$$

Produktmatrisen i sista led blir följdaktligen basbytesmatrisen som tar koordinatvektorer i basen D till koordinatvektorer i basen B, dvs vi har

$$_BP_D = {_BP_S}{_SP_D} = {_SP_B^{-1}}{_SP_D}$$

Exempel

Vi avslutar med exempel på hur man arbetar med basbytesmatriser.

Exempel 1. Låt oss ha baserna

$$B = \left\{\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \right\} \quad \text{och} \quad D = \left\{\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \right\}$$

Eftersom basvektorerna är uttryckta i standardbasen så får vi att

$$_SP_B = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad {_SP_D} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$$

Basbytesmatrisen $_BP_D$ blir nu

$$_BP_D = {_BP_S}{_SP_D} = {_SP_B^{-1}}{_SP_D}$$

Vi får att inversen till $_BP_S$ blir

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

och produkten blir således

$$ {}_BP_D = {}_SP_B^{-1}\,{}_SP_D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} $$

I basen D så ges basvektorerna i D på enklast möjliga sätt:

$$ [\mathbf{d}_1]_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_D \quad \text{och} \quad [\mathbf{d}_2]_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_D $$

Multiplicerar vi med basbytesmatrisen ${}_BP_D$ från vänster så får vi att D's basvektorer uttryckta i basen B blir

$$ [\mathbf{d}_1]_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}_B \quad \text{och} \quad [\mathbf{d}_2]_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}_B $$

Om vi jämför med basbytesmatrisen ${}_BP_D$ så ser vi att kolonnerna i denna matris precis är vektorerna i basen D uttryckta i basen B.

$\blacksquare$