Anatomi :: för Gausselimination

Trappstegsmatris och ledande variabler

Vi har sett hur vi kan lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ 2x-y+3z &= 2 \\ -x+y+z &= 1 \end{cases}$$

genom att överföra det på matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

och sedan Gausseliminera denna. Utför man de nödvändiga radoperationerna så får vi följande triangulära matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{13} \end{array}\right]$$

Om vi dessutom dividerar rad 2 med -5 så har vi fått en matris som är på så kallad **trappstegsform (Eng: row-echelon form)**. Denna har egenskapen att vi har nollor nedanför diagonalen och att det första nollskilda elementet i varje rad är 1[1] , (som vi kallar för radens **ledande etta**)[2]

Följande matris är alltså på trappstegsform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{13} \end{array}\right]$$

Om talen ovanför de ledande ettorna är 0 så säger vi att matrisen är på reducerad trappstegsform. Ovanstående matris kan lätt överföras på reducerad trappstegsform genom återsubstitution: använd rad 3 för att eliminera talen ovanför den nedersta ettan. Sedan använder vi rad 2 för att få noll ovanför ettan i rad 2. Vi får alltså

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{13} \end{array}\right]$$

Metoden att först Gausseliminera, fixa till ledande ettor och sedan utföra återsubstitution kallas tillsammans ofta för **Gauss-Jordan elimination**.

Fria variabler

Låt oss här betrakta ett annat ekvationssystem vars matris blir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

[1] Språkbruket är lite olika i olika böcker. I Lay tex så är det inte ett krav på att det första nollskilda elementet ska vara ett, i Anton/Rorres bok så krävs att den är 1.

[2] För mer info se kap 1.2 i Lay och 1.2 i Anton/Rorres

Gausseliminerar vi detta system så får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Och om vi dividerar för att få ledande ettor och utför bakåtsubstitution så blir resultatet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Låt variablerna kallas för x ,y och z. Då ser vi från ovan att x och y är ledande variabler eftersom det finns ledande ettor i kolonn 1 respektive kolonn 2.

Vad ska vi nu göra med variabeln z? Jo, rad 3 måste vi tolka som $0 \cdot z = 0$, och denna ekvation är uppfylld för varje värde på z som alltså är fri att vara vad som helst. Vi kallar därför z för en **fri variabel**, och sätter den lika med en reell parameter t, dvs $z = t$. Notera nu att rad 1 och 2 i den reducerade trappstegsmatrisen precis uttrycker de ledande variablerna med hjälp av den fria variabeln:

$$x = -t - \frac{1}{4}, \qquad y = t + \frac{3}{4}.$$

Så här ser det ut i allmänhet: Ett system med många variabler kan efter Gauss-Jordan elimination delas in i ett antal ledande variabler (som svarar mot kolonnerna med ledande ettor) och ett antal fria variabler (som svarar mot kolonner som inte har någon ledande etta). I den reducerade matrisen finner vi hur de ledande variablerna beror av de fria variablerna. Varje fri variabel ger en parameter och de ledande variablerna blir därför beroende av de fria variablernas parametrar. Den lösning som därmed skrivs upp kallas således systemets parameterlösning.

I vårt fall blir parameterlösningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1/4 \\ 3/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösningen är alltså en viss rät linje skriven på parameterform.