Homogena system :: superposition

Homogena ekvationssystem

Ett homogent ekvationssystem är ett vanligt ekvationssystem som har höger led som består av enbart nollor. Följande system är exempelvis homogent:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

medan föjlande system inte är homogent utan kan kallas för inhomogent:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Om vi utgår från ovanstående inhomogena system så kallar vi det första systemet för det inhomogena systemets motsvarande homogena system.

Vad är det som är så speciellt med homogena system?

Det som utmärker ett homogent system är att det alltid har minst en lösning. Om vi skriver upp systemets motsvarande ekvationer så ser vi detta tydligt:

$$\begin{cases} x - y + 2z & = 0, \\ 2x + 2y & = 0 \\ 3x + y + 2z & = 0 \end{cases}$$

Vi ser att om alla variablerna är noll så är systemet uppfyllt. Denna lösning kallas för **den triviala lösningen**. Lösningarna till homogena ekvationssystem beräknas på vanligt sätt med hjälp av Gauss elimination. En viktig fråga är om och när en homogen ekvation har andra lösningar än den triviala lösningen. Detta blir väldigt viktigt att veta när vi kommer till egenvärden och diagonalisering i kapitel 5 i Lay. Icketriviala lösningar uppträder i de fall vi får en nollrad vid Gausselimination!

Superpositionsprincipen

För att lösa ett inhomogent ekvationssystem så kan man ha nytta av att känna till lösningarna för motsvarande homogena ekvationssystem. Vi visar hur detta fungerar i följande exempel. Betrakta föregående inhomogena ekvationssystem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Gauss-Jordan elimination ger oss följande system

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

som har lösningarna

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ +\frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Om vi löser motsvarande homogena ekvationssystemet så får vi

$$\mathbf{x}_h = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Vi noterar att detta är precis den första delen av lösningen till det inhomogena ekvationssystemet och att denna lösning därför kan skrivas:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p,$$

där

$$\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} -1/4 \\ +3/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och detta är en så kallad partikulär (tänk engelskans particular), dvs en viss lösning till det inhomogena ekvationssystemet. Detta betyder att lösningen till det inhomogena ekvationssystemet är en translation av lösningen till motsvarande homogena ekvationssystem.

Detta är ingen slump. Med hjälp från matrisalgebra så kan vi formulera och bevisa följande sats som vårt exempel är en följd av:

Theorem 1. (Superpositionsprincipen)

Låt $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vara ett inhomogent ekvationssystem (dvs $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) och $\mathbf{x}_p$[1] en lösning till detta system. Låt $\mathbf{x}_h$ vara lösningen till motsvarande homogena ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Då kan den fullständiga lösningen till det inhomogena ekvationssystemet skrivas $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$.

Bevis:

Vi sätter in den föreslagna lösningen i vänster led av vår inhomogena ekvation:

$$A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x}_h + A\mathbf{x}_p = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b},$$

där vi i andra likheten utnyttjat att matrismultiplikationen är linjär och i den tredje har vi använt oss av att $\mathbf{x}_h$ löser det homogena ekvationssystemet och därför blir $\mathbf{0}$ samt att $\mathbf{x}_p$ löser det inhomogena systemet och varför vi får $\mathbf{b}$.

Lite relevant överkurs::

Den här typen av superpositionsprincip förekommer också när man ska lösa linjära differentialekvationer, som t.ex. $y'' + y = x$. I detta fall har vi en homogen differentialekvation $y'' + y = 0$ som har lösningen $y_h(x) = A\cos x + B\sin x$ och en partikulär lösning blir $y_p(x) = x$. Den allmänna lösningen blir nu

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos x + B\sin x + x$$

[1] x_p brukar ibland kallas för en partikulär lösning (efter engelskans particular) och är ju också en viss lösning till det inhomogena systemet