Matrismultiplikation :: $AB \neq BA$

Version 1.0 :: August 18, 2015

Vi ger exempel på att matrisprodukten inte är kommutativ. Om produkten AB är definierad så är det inte ens säkert att produkten BA är definierad. Och även om den råkar vara det så är det **i allmänhet inte sant att de båda produkterna är lika. M.a.o:**

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Matrisproduktens definition

Två matrisers $A_{m\times n}$ och $B_{p\times q}$ produkt $C = AB$ definieras om deras format är kompatibla, dvs om $n = p$. Produktmatrisen har då formatet $m\times q$, och ett element c_{ij}, som är elementet i C som står i rad i och kolonn j, fås som skalärprodukten av den i'te raden i A och den j'te kolonnen i B. Dvs, om $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ och $b_j = (b_{1j}, \dots, b_{nj})$ så beräknas c_{ij} enligt följande:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Vi visar nu att matrisprodukten BA inte behöver vara definierad även om AB är det.

Lemma 1. *Låt A vara $m \times n$ och B $n \times q$. Då är ju AB definierad, men BA är definierad endast då $q = m$.*

Här är ett konkret exempel som illustrerar detta lemma.

Exempel 2. *Låt*

$$\text{och} \quad A := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

I detta exempel ser vi att produkten AB är definierad medan BA inte är det. □

Matrisprodukten är inte kommutativ även om båda produkterna är definierade

Vi börjar med exempel som visar att även om båda produkterna är definierade så behöver inte de båda produktmatrisernas format överensstämma:

Exempel 3. *Låt*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B := \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Då får vi att de båda produkterna blir

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad BA = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

vilket ger att de båda produkterna inte kan vara lika eftersom de t.o.m har olika format!!! □

Även om de båda produkterna har samma format (vilket innebär att A och B är kvadratiska och av samma format) så är deras produkter i allmänhet inte lika:

Exempel 4. *Låt*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Då får vi

$$AB := \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad BA := \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

□