Exempel :: Spegling i godtycklig linje.

© Mikael Forsberg :: 17 augusti 2015 Version 1.0

Sammanfattning:: I detta dokument så är vårt uppdrag att beräkna matrisen för spegling i en godtycklig linje $y = kx$ som går genom origo och uttrycka matrisen med linjens lutning k. Resultatet som vi kommer att härleda är att speglingen i linjen $y = kx$ ges av matrisen

$$S = \frac{1}{1+k^2}\begin{bmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{bmatrix}$$

1 Introduktion till problemet

Hur ser matrisen ut för en spegling i en godtycklig linje $y = kx$ genom origo? Hur beror matrisen på linjens lutning k? Det finns många sätt att lösa denna uppgift och vi ska gå genom fyra olika metoder för att lösa problemet. Genom att studera dessa metoder så lär man sig en hel del om den geometriska styrkan i den linjära algebran.

Innehåll

1 Introduktion till problemet 1

2 Metod 1 :: Projektion av vektorer 2

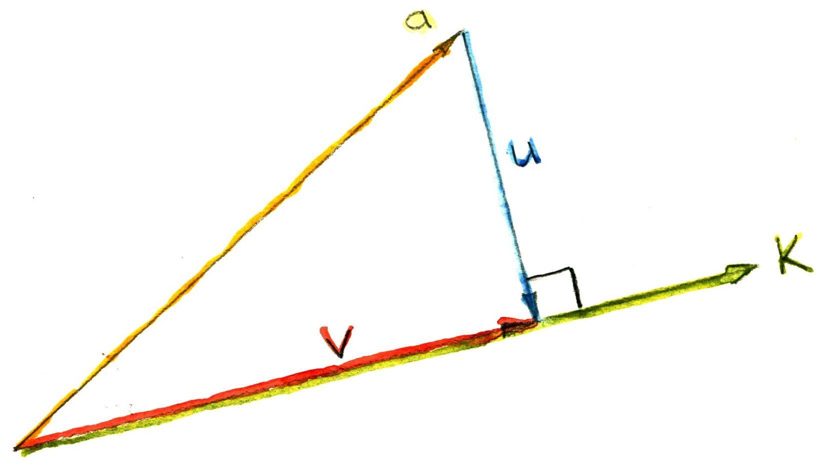
3 Metod 2 :: Rotera, spegla och rotera tillbaks 5

4 Metod 3 :: Använd egenteori 6

5 Metod 4 :: En smartare variant med egenteori 7

2 Metod 1 :: Projektion av vektorer

Vi ska härleda speglinsmatrisen genom att använda en metod som utnyttjar projektion av vektorer. Låt oss börja med att titta på projektion om introduceras i figuren 1:



Figur 1: Projektionen $\mathbf{v}$ av vektorn $\mathbf{a}$ i vektorn $\mathbf{K}$'s riktning. Notera även vektorn $\mathbf{u}$ som är ortogonal mot $\mathbf{K}$ och uppfyller $\mathbf{a}+\mathbf{u}=\mathbf{v}$.

Man kan visa att

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{K}}{||\mathbf{K}||^2}\,\mathbf{K} = \mathbf{proj}_{\mathbf{K}}\mathbf{a},$$

där den sista likheten definierar projektionssymbolen **proj**, och sista uttrycket läser vi vanligen som

$$\mathbf{proj}_{\mathbf{K}}\mathbf{a} = \quad \text{"}\textit{projektionen av vektorn } \mathbf{a} \textit{ i riktningen } \mathbf{K}.\text{"}$$

Nå, hur löser vi uppgiften?

Vi söker ju speglingens matris och denna får vi om vi vet vad speglingen gör med våra standardbasvektorer. Om vi kallar speglingensmatrisen för S så behöver vi alltså ta reda på $S\mathbf{e}_x$ och $S\mathbf{e}_y$ där $\mathbf{e}_x = (1,0)$ och $\mathbf{e}_y = (0,1)$. I figurerna 2 ser vi vad speglingen gör med standardbasen. Vi har också ritat in projektioner parallella med linjen med färger som är kopplade med färgerna i föregående projektion i figur 1.

Vi kan nu beräkna standardbasvektorernas speglingar:

Spegling av $\mathbf{e}_x$ ::

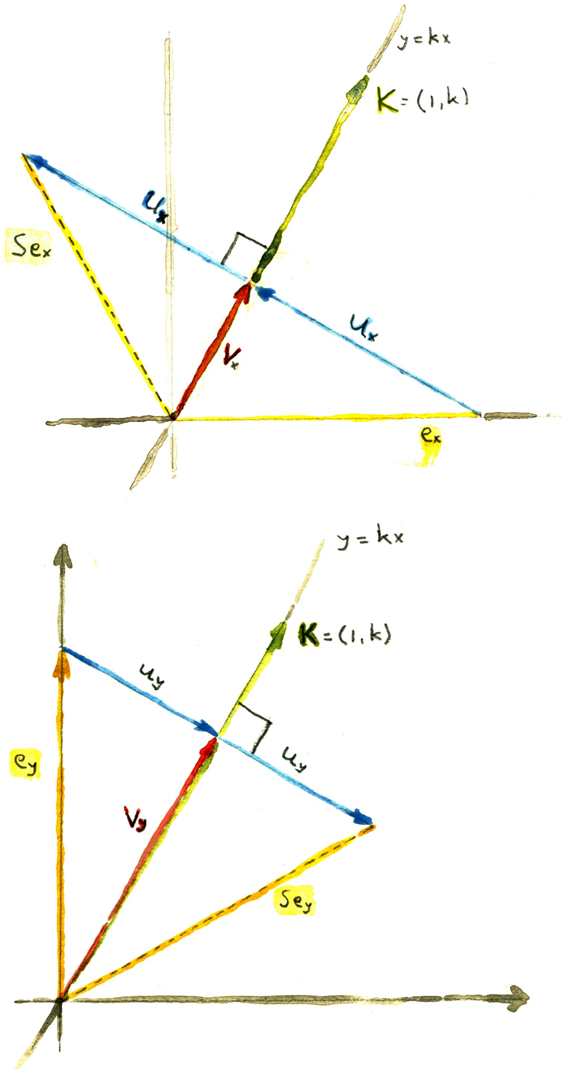
Vi har att

$$\mathbf{v}_x = \mathbf{proj}_{\mathbf{K}}\mathbf{e}_x = \frac{(1,0)\bullet(1,k)}{1+k^2}\,(1,k) = \frac{1}{1+k^2}\,(1,k)$$

vilket ger att

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{v}_x - \mathbf{e}_x = \frac{1}{1+k^2}\,(1,k) - (1,0) = \frac{1}{1+k^2}(-k^2,k)$$

$$S\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{u}_x = (1,0) + \frac{2}{1+k^2}(-k^2,k) = \frac{1}{1+k^2}(1-k^2,2k)$$



Figur 2: Till vänster har vi hur $\mathbf{e}_x$ speglas. Notera att $S\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{u}_x$. I högra figuren har vi hur $\mathbf{e}_y$ speglas. Här ser vi att $S\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y + 2\mathbf{u}_y$

Spegling av $\mathbf{e}_y$ ::

Vi har att

$$\mathbf{v}_y = \mathbf{proj}_{\mathbf{K}}\mathbf{e}_y = \frac{(0,1) \bullet (1,k)}{1+k^2}\,(1,k) = \frac{k}{1+k^2}\,(1,k)$$

vilket ger att

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{v}_y - \mathbf{e}_y = \frac{k}{1+k^2}\,(1,k) - (0,1) = \frac{1}{1+k^2}(k,-1)$$

$$S\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y + 2\mathbf{u}_y = (0,1) + \frac{2}{1+k^2}(k,-1) = \frac{1}{1+k^2}(2k, k^2-1)$$

Speglingsmatrisen ::

Vi får nu speglingsmatrisen genom att sätta $S\mathbf{e}_x$ och $S\mathbf{e}_y$ som kolonnerna i en matris, dvs

$$S_k = \frac{1}{1+k^2}\begin{bmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{bmatrix}$$

3 Metod 2 :: Rotera, spegla och rotera tillbaks

Man skulle också kunna tänka sig att använda spegling i x-axeln på något vis. Denna spegling är i någon mening generisk och alla andra speglingar i linjer borde kunna relateras till x-axelspeglingen. Vi ska i detta avsnitt reda ut hur man kan gå till väga.

Gör så här::

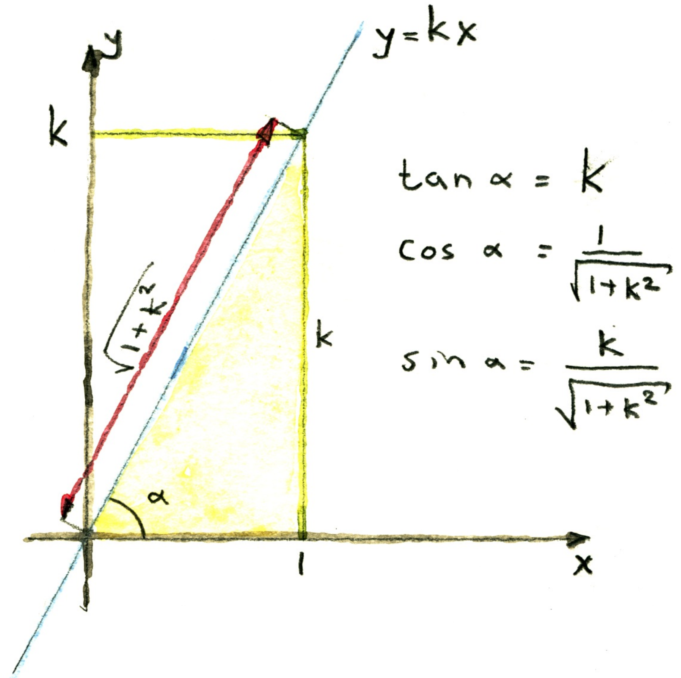
1 :: Rotera linjen till x-axeln.

2 :: Spegla i x-axeln

3 :: Rotera tillbaka.

4 :: Matrisen för speglingen i linjen $y = kx$ blir produkten av matriserna för de ovanstående linjära avbildningarna.

Vi använder figur 3



Figur 3: Figur för alternativ 1. Notera de trigonometriska uttrycken som fås från den rätvinkliga triangeln som bestäms av punkterna $(0, 0), (1, 0)$ samt $(1, k)$. Pythagoras sats har använts för att få hypotenusans längd $\sqrt{1 + k^2}$.

1 :: Börja då med att rotera linjen medurs med den vinkel som linjen har till positiva delen av x-axeln, dvs med vinkeln $-\alpha = -\arctan k$ (minustecknet uppkommer eftersom vi roterar medurs, vilket är negativ riktning för vinklarna): Matrisen för denna avbildning blir då

$$R_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

där vi utnyttjat att $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ och $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

2 :: Spegling i x-axeln ges av matrisen

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3 :: Rotation tillbaka sker i positiv (moturs) riktning, dvs med vinkeln $+\alpha$ och dess matris blir

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

4 :: Vår matris S_k blir (här är de noga med ordningen vi ställer upp matriserna i

$$\begin{aligned} S_k = R_\alpha S_x R_{-\alpha} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\cos\alpha\sin\alpha \\ 2\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1+k^2} \begin{bmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

där vi i sista likheten har utnyttjat formlerna i figur 3.

4 Metod 3 :: Använd egenteori

När man har kännedom om egenvärdesteori så kan man förstå att speglingslinjen och den linje som är ortogonal till denna är spänns upp av egenvektorerna till speglingsmatrisen. Vi känner visserligen inte speglingsmatrisen (det är ju denna vi ska beräkna) men eftersom vi känner till egenvektorerna så borde vi kunna beräkna speglingsmatrisen från dessa.

Identifiera egenvektorerna :: Invarianta riktningar:: $v_1 = (1, k)$ och $v_2 = (-k, 1)$.

Skriv som egenvärdesproblem:: [footnote[1]] $Sv_1 = v_1$, $Sv_2 = -v_2$. Om $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så får vi fyra ekvationer i variablerna a, b, c, d:

$$\begin{aligned} a + kb &= 1 && (1) \\ c + kd &= k && (2) \\ ka - b &= -k && (3) \\ kc - d &= 1 && (4) \end{aligned}$$

Sortera om ekvationerna och skriv på matrisform :: Skriv ekvationerna i ordningen 1,3,2,4 så får vi på matrisform

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 0 & 0 & 1 \\ k & -1 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1 & k & k \\ 0 & 0 & k & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Lös systemet :: Beräkna lösningen:: visas i figur 4

Ställ upp speglingsmatrisen::

$$S = \frac{1}{1+k^2} \begin{bmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{bmatrix}$$

[1] v_1 spänner upp speglingslinjen och denna förändras inte. Linjen som är vinkelrät mot speglingslinjen vänds upp och ned och detta ger att egenvärdet är minus ett.

5 Metod 4 :: En smartare variant med egenteori

Från speglingidén kan vi få att egenvärdena måste vara $\lambda = \pm 1$ där den positiva svarar mot speglingslinjen och den negativa från den speglingslinjens ortogonala komplementlinje (denna vänds ju upp och ned och måste därför byta tecken) Detta ger att diagonalmatrisen måste vara

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorerna är speglingslinjens och den ortogonala linjens riktningsvektorer: $v_1 = (1, k)$ och $v_2 = (-k, 1)$. Dessa vektorer är naturligtvis ortogonala, vilket vi också lätt verifierar via skalärprodukten, som blir noll. Normerar vi dessa och sätter in i en matris så får vi en ortogonal matris

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{bmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

Denna matris är den matris som ortogonalt diagonaliserar vår speglingsmatris och detta betyder att vi har

$$D = P^T SP, \text{ kom ihåg att } P^{-1} = P^T \text{ för en ortogonal matris}$$

från vilket vi löser ut S:

$$S = PDP^T = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{bmatrix}} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{bmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+k^2} \begin{bmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{bmatrix}$$

Exempel 1. Lös ekvationssystemet

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & k & 0 & 0 & 1 \\
k & -1 & 0 & 0 & -k \\
0 & 0 & 1 & k & k \\
0 & 0 & k & -1 & 1
\end{array}\right] \rightarrow
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & k & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1-k^2 & 0 & 0 & -2\,k \\
0 & 0 & 1 & k & k \\
0 & 0 & k & -1 & 1
\end{array}\right] \rightarrow
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & k & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1-k^2 & 0 & 0 & -2\,k \\
0 & 0 & 1 & k & k \\
0 & 0 & 0 & -1-k^2 & 1-k^2
\end{array}\right] \rightarrow
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & k & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2\,\dfrac{k}{k^2+1} \\
0 & 0 & 1 & k & k \\
0 & 0 & 0 & -1-k^2 & 1-k^2
\end{array}\right] \rightarrow
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & k & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2\,\dfrac{k}{k^2+1} \\
0 & 0 & 1 & k & k \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{k^2-1}{k^2+1}
\end{array}\right] \rightarrow
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & k & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2\,\dfrac{k}{k^2+1} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2\,\dfrac{k}{k^2+1} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{k^2-1}{k^2+1}
\end{array}\right] \rightarrow
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{k^2-1}{k^2+1} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2\,\dfrac{k}{k^2+1} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2\,\dfrac{k}{k^2+1} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{k^2-1}{k^2+1}
\end{array}\right]
$$

Figur 4: Gausselimination av ekvationssystemet för att bestämma speglingsmatrisens element.