HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
xxx

Matematik med datalogi, mfl.
LINJÄR ALGEBRA
ma041a
OT-2016 01 13

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

FRÅGORNA 1 TILL 6 SKA SVARAS MED ETT KRYSS FÖR VARJE KORREKT PÅSTÅENDE. VARJE UPPGIFT GER 1 POÄNG. ANVÄND BIFOGAT FORMULÄR FÖR DESSA 6 FRÅGOR.

1. Betrakta matrisernas format: Låt $A = m \times n$, $B = m \times p$ och $C = p \times n$
   Vilka av följande produkter är definierade
   (a) $A \cdot C$
   (b) $A \cdot C^T$
   (c) $A \cdot B$
   (d) $B \cdot C^T$
   (e) $C^T \cdot B^T$

2. Låt A vara en kvadratisk $n \times n$ matris med rang $k < n$. Vad är sant för det homogena ekvationssystemet $Ax = 0$?
   (a) Systemet har endast den triviala lösningen
   (b) Systemet är inkonsistent.
   (c) Alla lösningar är ortogonala mot radrummet till matrisen A.
   (d) Lösningsrummet har dimension k.
   (e) Systemet har icketriviala lösningar.

3. Vilka av följande påståenden är ekvivalent med att $n \times n$-matrisen A har invers?
   (a) $\det A = 0$
   (b) A har n stycken linjärt beroende radvektorer
   (c) A har n stycken linjärt beroende kolonner
   (d) A's rader bildar en bas för $\mathbb{R}^n$
   (e) 0 är inte ett egenvärde till A

4. Låt A vara en $n \times n$-matris, $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \lambda_n$ dess egenvärden och $v_1, \ldots, v_n$ motsvarande egenvektorer.
   Ange vilka av följande påståenden som är falska.
   (a) A är diagonaliserbar

(b) v_i anger de riktningar som förblir oförändrade när vi låter avbildningen A verkar på riktningen.

(c) λ_i anger hur mycket en egenriktningen förändras i storlek.

(d) Diagonalmatrisen har egenvärdena på diagonalen.

(e) Diagonalmatrisen uppfyller $D = P^T AP$ där P är den diagonaliserande matrisen som har egenvektorerna som kolonner.

5. Låt W vara ett m-dimensionellt delrum av $V = \mathbb{R}^n$, $m < n$.
Ange vilka av följande påståenden som inte är sanna

(a) $0 \in W$

(b) Om $b_1, \ldots b_m \in W$ är linjärt oberende så gäller att $\{b_1, \ldots b_m\}$ är en bas för W

(c) Om $b_1, \ldots b_m \in W$ är spänner upp W så gäller att $\{b_1, \ldots b_m\}$ är en bas för W

(d) Om $u, v \in V$ så gäller att $au + bv \in W$ för alla reella tal a och b

(e) Om $u \in W$ så gäller att $tu \in W$ för alla reella tal t.

6. Låt A vara en $n \times n$-matris med rang n Vilka av följande påståenden är inte sanna

(a) A är inverterbar

(b) $\dim Noll(A) = 1$

(c) $\dim Row(A) = n$

(d) Systemet $Ax = b$ har unik lösning för alla $b \in \mathbb{R}^n$

(e) Systemet $Ax = 0$ har icke triviala lösningar.

Frågorna 7-9 ger 3 poäng vardera

7. Lös matrisekvationen $AX + M = C$, där

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

8. Beräkna diagonalmatrisen till

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Beräkna projektionen av vektorn $v = (-1, 1, 1)$ till delrummet

$$W = Span\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=w_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=w_2} \right\}$$

Uppgifterna 10 -14 kräver fullständiga och väl motiverade lösningar. Uppgifterna ger 5 poäng vardera

10. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Beräkna baser för radrum och nollrum till A och visa/förklara varför radrummet är ortogonalt mot nollrummet.

11. Låt

$$M(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & 1 & t \\ t-1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna inversen till $M(t)$ när t är det minsta positiva heltal som gör att inversen existerar.

12. Beräkna den ekvation på formen $ax^2 - by^2 = 1$ som bäst anpassar sig till punkterna

$$(-1, 2), (-2, -1), (0, -1), (1, 3), (2, -2),$$

13. Beräkna en ON-bas för

$$W = Span\{(1, 2, 1, 4, 0), (1, -2, 1, 0, 0), (-2, 1, 1, 0, -3), (1, 1, 1, 3, 0), (-1, -1, 1, -1, -2)\}$$

14. Beskriv lösningarna till den kvadratiska ekvationen

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 - 16\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y + 26 = 0$$

Hint :: Diagonalisera den kvadratiska formen och kvadratkomplettera

Svarsformulär för de sex första uppgifterna.
[Answer Form for the six first questions]

Skriv ett kryss för varje rätt svar. [Put a cross for each correct anwer.]
Observera att vissa av frågorna kan ha flera korrekta svar. [Note that some questions may have several correct answers]

NAMN ::

....

	a	b	c	d	e
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Summa :
(fylls i av läraren)

Riv loss formuläret, skriv namn
och lägg det tillsammans med dina lösningar.

Svar till tentamen i Linjär algebra, OT-2016 01 13 .

1. b och e

2. (a) Falskt :: Dimensionssatsen säger att nollrummets dimension är lika med $n-k>0$ vilket betyder att det finns många icketriviala lösningar.

   (b) Falskt :: Homogena system har alltid den triviala lösningen så de är alltid konsistenta

   (c) Sant :: I matrisprodukten $Ax=0$ har vi att vänster led beräknas som skalärprodukten mellan rad för A och kolonn för x och att det blir noll säger att x är vinkelrät mot radvektorerna.

   (d) Falskt ::Dimensionssatsen säger att lösningsrummet (dvs nollrummet) har dimension $n-k$.

   (e) Sant :: Eftersom A inte har full rang så finns icketriviala lösningar.

3. d, e

4.

5. d

6. b och e

7.

$$X=\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

t

9. $\mathbf{proj}_W v=(0,1,0)$

10.

11.

12.

13. En ON-bas:

$$\text{ON-bas } = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,0,1,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(0,0,1,1,-1), \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,3,-1,1,0) \right\}.$$

(många andra möjligheter finns.)

14.

Svar till tentamen i Linjär algebra, OT-2016 01 13 .

1. b och e

2. (a) Falskt :: Dimensionssatsen säger att nollrummets dimension är lika med $n-k>0$ vilket betyder att det finns många icketriviala lösningar.

   (b) Falskt :: Homogena system har alltid den triviala lösningen så de är alltid konsistenta

   (c) Sant :: I matrisprodukten $Ax=0$ har vi att vänster led beräknas som skalärprodukten mellan rad för A och kolonn för x och att det blir noll säger att x är vinkelrät mot radvektorerna.

   (d) Falskt ::Dimensionssatsen säger att lösningsrummet (dvs nollrummet) har dimension $n-k$.

   (e) Sant :: Eftersom A inte har full rang så finns icketriviala lösningar.

3. d, e

4.

5. d

6. b och e

7.

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

t

9. $\mathbf{proj}_W v = (0,1,0)$

10.

11.

12.

13. En ON-bas:

$$\text{ON-bas } = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,0,1,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(0,0,1,1,-1), \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,3,-1,1,0) \right\}.$$

(många andra möjligheter finns.)

14.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, OT-2016 01 13 .

1. Notera att om en matris har formatet $m \times n$ så har transponatet formatet $n \times m$.

2.

3.

4. (a) Matrisen är diagonaliserbar eftersom egenvärdena är alla olika (inget multippelt egenvärde tack vare olikheterna)

(b) En egenvektor söks ju som lösning till $Ax = \lambda x$ dvs x avbildas på λx. Detta betyder att riktningen blir samma

(c) men vi har en förstoringsfaktor som bestäms av λ

(d) Sant

(e) Gäller bara om A är symmetrisk och om vi sett till att egenvektorerna bildar ortonormal mängd. Falskt.

5. a, och e är i princip delrumsaxioment så dessa är sanna eftersom W är ett delrum b är också sann eftersom om de är linjärt oberoende och är m stycken så spänner de upp en m-dimensionell delmängd S av W. Men eftersom W själv är m-dimensionell så måste $S = W$ och då bildar de en bas eftersom de också spänner upp W. c är sann eftersom det är m stycken vektorer som spänner upp W. m är det minsta antal vektorer som spänner upp W och då måste vektorerna faktiskt vara oberoende. d är inte sann eftersom $u, v \in V$ inte automatiskt innebär att $u, v \in W$ (att $m < n$ betyder att det finns vektorer som ligger i V men inte i W.

6.

7. Noter att alla matriserna är inverterbara. Vi löser ekvationen genom att först subtrahera matrisen M från båda led och

$$AX = C - M, \qquad \text{dvs} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Nu kan man beräkna A^{-1} och multiplicera båda led med den för att få ut X:

$$X = A^{-1}(C - M)$$

Produktmatrisen $A^{-1}(C - M)$ kan också beräknas direkt genom att ställa upp och Gauss-Jordan eliminera

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right]$$

Vilket ger att

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

8. Observera att vi bara behöver egenvärdena eftersom diagonalmatrisen har dessa på diagonalen (och nollor för övrigt). Vi behöver alltså inte beräkna diagonaliserande matris och därför inga egenvektorer, vilket minimerar arbetet.

Egenvärden beräknas från den karakteristiska ekvationen $c(\lambda) = 0$:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \cdots = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 10\lambda = -\lambda(\lambda+2)(\lambda-5)$$

Med egenvärdena $0, -2$ och 5, varför den diagonala matrisen blir

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

9. Notera att de två vektorerna är oberoende och icke ortogonala. Detta gör att vi inte kan använda projektionerna av vektorn på dessa uppspännande vektorer.

Om de uppsännande vektorerna w_1, w_2 varit ortogonala hade vi kunnat projicera v på dessa och sedan bara summerat projektionerna

Gram-Schmidt är dock en möjlighet för att få fram en ortogonal bas för W. Vi väljer en annan väg genom att först beräkna kryssprodukten

$$n = w_1 \times w_2 = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (-1, 0, 1)$$

och sedan projicera v nu på denna:

$$\mathbf{proj}_n v = \frac{(-1,1,1) \bullet (-1,0,1)}{2}(-1,0,1) = (-1,0,1)$$

Projektionen till W får vi nu genom att subtrahera denna projektion från v:

$$\mathbf{proj}_W v = v - \mathbf{proj}_n v = (-1,1,1) - (-1,0,1) = (0,1,0)$$

10.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Radrumsbasen blir

$$\{(1,0,1,0,-2), (0,1,0,0,2), (0,0,0,1,2)\}$$

Vi beräknar nu nollrummet, dvs lösningar till $Ax = 0$. Systemets matris blir efter reducering:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Om vi kallar variablerna för $x_1, \ldots x_5$ så har vi att x_1, x_2 och x_4 är ledande variabler och $x_3 = s$ och $x_5 = t$ är fria. Rad 1 ger $x_1 = -x_3 + 2x_5 = -s + 2t$, rad 2 ger $x_2 = -2x_5 = -2t$ och rad 3 ger $x_4 = -2x_5 = -2t$. Nollrummet blir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

De två vektorerna är alltså en bas för nollrummet. Vi noterar att varje basvektorer för nollrummet är ortogonal mot radrummets alla basvektorer. (skalärprodukterna blir noll!) Därför är nollrummet ortogonalt mot radrummet.

11. Inversen existerar om determinanten inte är noll. Vi börjar därför med att beräkna det $M(t)$ och försöker bestämma t så att $M(t) = 0$. Då får vi reda på exakt vilka värden på t som gör att matrisen saknar invers.

$$\det M(t) = t^3 - t^2 - 4t + 4 = (t-1)(t-2)(t+2)$$

Faktoriseringen fås naturligtvis genom att beräkna polynomets nollställen. Man börjar med att gissa på värden som delar konstanttermen 4. Detta ger oss ± 1, ± 2 samt ± 4 som potentiella nollställen. Man får då att $t = 1$, $t = 2$ och $t = -2$ är de nollställen vi söker. För dessa tre värden så saknar vår matris invers. För övriga värden så är $M(t)$ inverterbar. Det minsta positiva heltalet med invers blir därför $t = 3$.

Vi beräknar inversen för $t = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Inversen blir alltså

$$M(3)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

12. Varje punkt insatt i ekvationen ger en ekvation i koeffecienterna a och b:

$$\begin{aligned} a - 4b &= 1 \\ 4a - b &= 1 \\ -b &= 1 \\ a - 9b &= 1 \\ 4a - 4b &= 1 \end{aligned}$$

som på matrisform blir

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -9 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

För att lösa detta överbestämda system så multiplicerar vi båda led med A^T:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & -1 & -9 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -9 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & -1 & -9 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som ger oss

$$\begin{bmatrix} 34 & -33 \\ -33 & 115 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -19 \end{bmatrix}$$

Vi löser detta

$$\left[\begin{array}{cc|c} 34 & -33 & 10 \\ -33 & 115 & -19 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{523}{2821} \\ 0 & 1 & -\frac{316}{2821} \end{array}\right]$$

Vår ekvation blir alltså

$$\frac{523}{2821}x^2 + \frac{316}{2821}y^2 = 1$$

13. Ställ upp vektorerna som rader i en matris och Gauss-Jordan eliminera. Detta ger oss en bas för W med enklare vektorer (fler nollor):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Här ser vi att vi har en bas med tre vektorer. Notera också att rad 1 och rad 3 redan är vinkelräta så dessa två vektorer blir våra första två basvektorer, vi normerar dessa så att de har längden ett:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,0,1,1)$$
$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,0,1,1,-1)$$

Vi använder nu Gram-Schmidt och beräknar den tredje vektorn, vi kallar andra raden i den reducerade matrisen för u:

$$\begin{aligned} v_3 &= u - \mathbf{proj}_{b_1} u - \mathbf{proj}_{b_2} u = \\ &= (0,1,0,1,0) - \frac{(0,1,0,1,0) \bullet (1,0,0,1,1)}{3}(1,0,0,1,1) - \frac{(0,1,0,1,0) \bullet (0,0,1,1,-1)}{3}(0,0,1,1,-1) = \\ &= (0,1,0,1,0) - \frac{1}{3}(1,0,0,1,1) - \frac{1}{3}(0,0,1,1,-1) = \frac{1}{3}(-1,3,-1,1,0) \end{aligned}$$

En snabb check visar att denna vektor verkligan är ortogonal mot de två första vektorerna. En snabb normering

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1,3,-1,1,0) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,3,-1,1,0)$$

ger oss nu den fullständiga ON-basen:

$$\text{ON-bas } = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,0,1,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(0,0,1,1,-1), \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,3,-1,1,0) \right\}.$$

14. (a) Vi börjar med att skriva ekvationen på matrisform.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 26 = 0$$

(b) Diagonalisera matrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

till den kvadratiska formen: Det karakteristiska polynomet:

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1$$

ger oss egenvärdena $\lambda = 4$ och $\lambda = 6$. Egenvektorerna

$$\lambda = 4 \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 6 \qquad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagonaliserande matris blir

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

som är en rotation eftersom dess determinant är $+1$. Notera att matrisen också är ortogonal eftersom dess kolonnvektorer är ortogonala och har längden 1. Detta gör att $P^{-1} = P^T$.

(c) Utför variabelbytet (som är en rotation tack vare att $\det P = 1$)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} P^T$$

Vår kvadratiska ekvation blir nu

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \underbrace{P^T \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} P}_{= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + 26 = 0$$

Räknar vi samman detta får vi att vår kvadratiska ekvation transformerats till

$$3X^2 - 12X + 2Y^2 + 4Y + 13 = 0,$$

där vi också dividerat båda led med 2.

(d) Nu kvadratkompletterar vi m.a.p. X och Y: Vi har

$$\begin{aligned} 0 &= 3(\underbrace{X^2 - 4X + 4}_{(X-2)^2} - 4) + 2(\underbrace{Y^2 + 2Y + 1}_{(Y+1)^2} - 1) + 13 = \\ &= 3(X-2)^2 - 12 + 2(Y+1)^2 - 2 + 13 = \\ &= 3(X-2)^2 + 2(Y+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

(e) Translatera koordinaterna $x = X - 2$, $y = Y + 1$ så får vi

$$3x^2 + 2y^2 = 1$$

som uppenbarligen definierar en ellips. (Notera att dessa slutkoordinater x, y inte är samma som de vi startade med utan jag har bara valt att använda dessa bokstäver för att vi är vana att se dessa ekvationer uttryckta i x och y. Vi har att de nya x och y uppfyller.

$$X = x + 2, \qquad Y = y - 1$$

De gamla x och y uppfyller

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{bmatrix},$$

där de gamla koordinaterna står till vänster och de nya till höger. De gamla och de nya skiljer sig alltså åt med en rotation (given av P) och en translation.