HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg

Övningstenta Ht2015-1

Frågorna 1 till 6 ger vardera 1 poäng.

1. Låt M vara en $n \times n$ matris Vilket av följande påståenden är inte ekvivalent med de övriga.
   (a) Matrisen M har n oberende kolonnvektorer
   (b) Matrisen M har n oberoende radvektorer
   (c) Matrisen M är inverterbar.
   (d) Matrisen M har nollskild determinant
   (e) Ekvationen $Mx = 0$ har icketriviala lösningar.

2. Låt M vara en $n \times n$ matris. Vilket av följande påståenden är inte ekvivalent med de övriga?
   (a) M är en ortogonal matris.
   (b) M har n stycken olika egenvärden.
   (c) $M^T = M^{-1}$
   (d) M?s rader bildar en ortonormal bas
   (e) M?s kolonner bildar en ortonormal bas.

3. Låt $v_1, \ldots, v_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är linjärt oberoende och låt M vara matrisen som har $v_1, \ldots, v_n$ som kolonner.Vilket av följande är falskt?
   (a) Ekvationen $t_1 v_1 + \ldots t_n v_n = 0$ har icketriviala lösningar
   (b) $\det M \neq 0$
   (c) Ekvationen $Mx = b$ har unik lösning för alla $b \in \mathbb{R}^n$.
   (d) M's nollrum består bara av nollvektorn.
   (e) $v_1, \ldots, v_n$ bildar en bas för $\mathbb{R}^n$.

4. Delrummen som hör ihop med en matris, radrum, kolonnrum och nollrum är kopplade med varandra. Vilket av följande påstående är falskt?

   (a) Kolonnrummet är värdemängden för matrisen.

   (b) Kolonnrummet och Radrummet har alltid samma dimension.

   (c) Dimensonen för radrummet + dimensionen för nollrummet är lika med dimensionen för kolonnrummet

   (d) Rangen + nollrummets dimension är lika med antalet kolonner i matrisen.

   (e) Kolonnrummets dimension är lika med antalet ledande element i matrisens Gausseliminerade matris.

5. Ange vilket av följande påstående som är falskt när det gäller diagonaliserbarhet för en $n \times n$-matris.

   (a) Om matrisen är symmetrisk så är den diagonaliserbar.

   (b) Matrisen är diagonaliserbar om den har n stycken egenvärden, räknade med multiplicitet

   (c) Matrisen är diagonaliserbar om matrisen har n olika egenvärden.

   (d) Matrisen är diagonaliserbar om det finns n stycken linjärt oberoende egenvektorer.

   (e) Matrisen är diagonaliserbar om varje egenvärdes algebraiska multiplicitet är lika med dess geometriska multiplicitet.

6. Vilka av följande uppsättningar av vektorer är inte en bas för $\mathbb{R}^3$

   (a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,0,1)\}$

   (b) $\{(1,0,1),(2,0,2),(3,1,3)\}$

   (c) $\{(1,2,1),(1,1,2)\}$

   (d) $\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

   (e) $\{(1,1,1),(-2,1,1),(0,1,-1)\}$

Frågorna 7-9 ger 3 poäng vardera. Fullständiga lösningar krävs

7. Lös följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z \quad &= 2 \\ 3x + 2y + 2z \quad &= 2 \\ x + 3y + 3z \quad &= 3 \end{aligned}$$

8. Betrakta följande matriser som avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$. Beräkna matrisen vi får genom att sammansätta A med B, dvs vi utför avbildningen A först och sedan avbildningen B.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

9. Beräkna arean av parallellogrammet som spänns av de två vektorerna

$$u = (2, -3, 5) \quad \text{och} \quad v = (2, 5, -3)$$

Uppgifterna 10 -14 kräver fullständiga och väl motiverade lösningar. Uppgifterna ger 5 poäng vardera

10. Beräkna baser för rad, kolonn och nollrum till matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

11. Beräkna en ON-bas för radrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

12. Hitta det andragradspolynom som bäst anpassar sig till punkterna

$$(-2,3), (-1,1), (0,1), (1,1), (2,4)$$

13. Låt kolonnvektorerna (som är uttryckta i standardbasen) i följande matriser vara två baser i $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna matrisen som byter vektorer uttryckta i basen B till vektorer uttryckta i basen A.

14. Följande kvadratiska ekvation definierar en ellips vars centrum inte ligger i origo.

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + 4\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 4 = 0$$

Beräkna ett basbyte tillsammans med en translation till ellipsens centrum och skriv ellipsen i de nya basvektorerna relativt ellisens centrum. Ange också (x, y)-koordinaterna för ellipsens centrum. Hint :: diagonalisera den kvadratiska formen

Svar till tentamen i , .

1. e

2. b

3. a

4. c

5. b

6. endast e är en bas för vårt tredimensionella rum

7. $x = 0$, $y = z = \frac{1}{2}$

8.

$$BA = \begin{bmatrix} -11 & -1 & -2 \\ 7 & -5 & 5 \\ -7 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

9.

$$\text{Area } = ||(-16, 16, 16)|| = \sqrt{768} = 16\sqrt{3}$$

10. se lösningen

11.

$$o_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 0, 1, -1)$$
$$o_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 3, 0, 1, -1)$$
$$o_3 = \frac{1}{2\sqrt{65}}(7, 7, 5, 4, 11)$$

Obs det finns många möjliga korrekta svar.

12. Det bäst anpassade polynomet är

$$p(x) = \frac{4}{7} + \frac{1}{5}x + \frac{5}{7}x^2$$

13.

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

14.

$$4x''^2 + 9y''^2 = 36, \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - 1 \\ y' - 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Ellipsens centrum ligger i $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$

Lösningar till tentamen i , .

1. e är inte ekvivalent eftersom en inverterbar matris ger unik lösning till ekvationssystemet $Mx = b$ för alla b, speciellt för $b = 0$.

2. En matris är ortogonal precis om kolonnvektorerna (eller radvektorerna) bildar en ortonormal bas. Att en matris har olika egenvärden säger ingenting om hur matrisens rad och kolonnvektorer förhåller sig till varandra.

3. Om vektorerna är linjärt oberoende så har ekvationen i alternativ a endast den triviala lösningen, (pga definitionen av linjärt oberoende)

4. c är falsk, detta kan gälla i vissa fall men gäller inte för andra. T.ex en 3×3-matris som har **en** fri variabel så är nollrummets dimension 1. Rangen, som är dimensionen för både radrum och kolonnrum + nollrummets dimension är lika med antal kolonner ger att rangen är 2. Påståendet i punkt c skulle då ge att $2 + 1 = 2$ vilket är falskt.

5. Alla är sanna utom b som är falskt eftersom ett egenvärde med multiplicitet 2 (t.ex) kan ha ett egenrum som har dimension 1.

6. a är inte en bas eftersom en av vektorerna inte ens ligger i $\mathbb{R}^3$. b ej bas ty första och andra vektorn är parallella. c har får få vektorer, kan inte spänna upp d har för många vektorer, är ej oberoende e är t.o.m en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$.

7. Ställ upp systemet på matrisform och eliminera.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Lösningarna är $x = 0$, $y = z = \frac{1}{2}$

8. Här är det frågan om att ställa upp rätt matrisprodukt. Att A ska utföras först betyder att den ska stå längst till höger. Detta byder att vi behöver beräkna matrisprodukten

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -1 & -2 \\ 7 & -5 & 5 \\ -7 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

9. Arean av ett parallellogram genererat av två tredimensionella vektorer kan beräknas mha kryssprodukten

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} = (-16, 16, 16)$$

Arean för parallellogrammet är längden av denna kryssproduktsvektor:

$$\text{Area } = ||(-16, 16, 16)|| = \sqrt{768} = 16\sqrt{3}$$

10. Gauss-Jordaneliminera/radreducera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & 1 & -\frac{37}{2} & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & \frac{11}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & \frac{23}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Från detta följer det direkt att de tre nollskillda vektorerna i den eliminerade matrisen är en bas för radrummet. Eftersom de ledande elementen står i de tre första kolonnerna så är de tre första kolonnerna i M bas för kolonnrummet. Nollrummet är lösningarna till $Mx = 0$ och mha den elimnerade matrisen får vi att

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2x_4 - x_5 + \frac{37}{2}x_6 + 6x_7 = 2s - t + \frac{37}{2}u + 6v \\
x_2 &= -2x_4 - \frac{11}{2}x_6 - x_7 = -2s - \frac{11}{2}u - v \\
x_3 &= -x_4 - \frac{23}{2}x_6 - 5x_7 = -s - \frac{23}{2}u - 5v
\end{aligned}$$

Vilket ger oss lösningarna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{37}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{23}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

11. Börja med radreduktion för att få fram en bas för radrummet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De tre nollskilda raderna (kalla dem v_1, v_2 och v_3) är nu en bas för radrummet. Vi behöver nu använda Gram-Schmidt för att göra om den till en ortonormal bas. Låt $b_1 = v_1 = (1, 0, 0, 1, -1)$ och beräkna b_2 genom att subtrahera v_2's projektion på v_1 från v_2:

$$\begin{aligned}
b_1 &= (1, 0, 0, 1, -1) \\
b_2 &= v_2 - \mathbf{proj}_{b_1} v_2 = \cdots = \left(-\frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\
b_3 &= v_3 - \mathbf{proj}_{b_1} v_3 - \mathbf{proj}_{b_2} v_3 = \cdots = \left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}, 1, \frac{4}{5}, \frac{11}{5}\right)
\end{aligned}$$

Vi normerar nu basen så att vi får enhetsvektorer:

$$\begin{aligned}
o_1 &= \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 0, 1, -1) \\
o_2 &= \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 3, 0, 1, -1) \\
o_3 &= \frac{b_3}{||b_3||} = \frac{1}{2\sqrt{65}}(7, 7, 5, 4, 11)
\end{aligned}$$

och detta är vår ON-bas men det finns många andra möjliga ON-baser.

12. Vi ska anpassa andragradspolynomet $y = a + bx + cx^2$ till våra punkter. Varje punkt ger då en ekvation i koeffecienterna a, b och c:

$$\begin{aligned} a - 2b + 4c &= 3 \\ a - b + c &= 1 \\ a &= 1 \\ a + b + c &= 1 \\ a + 2b + 4c &= 4 \end{aligned}$$

På matrisform har vi

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Systemet är inte lösbart som det är men minsta kvadratmetoden säger att vi får ett lösbart system (som beräknar den i minstakvadratmening bästa lösningen) om vi multiplicerar båda sidorna med transponatet till matrisen i vänster led. Vi får då systemet som vi löser med Gausselimination

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 2 \\ 10 & 0 & 34 & 30 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \end{array}\right]$$

Det bäst anpassade polynomet är

$$p(x) = \frac{4}{7} + \frac{1}{5}x + \frac{5}{7}x^2$$

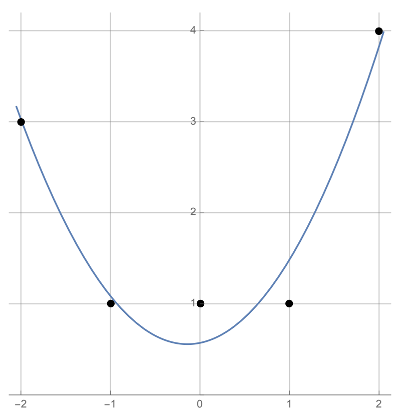

Figure 1: Punkterna och det bäst anpassade polynomets graf.

13. Matriserna A och B byter från vektorern uttryckta i A respektive B till vektorer uttryckta i standardbasen S. För att byta från B till A kan vi först byta från B till S och sedan använda A^{-1} för att byta från S till A. Matrisen vi söker är alltså produkten av matrisen B multiplicerat med matrisen A^{-1} från vänster. Matrisen $A^{-1}B$ kan vi beräkna genom uppställningen

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{6} \end{array}\right]$$

Vår basbytesmatris blir nu

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

14. Vi skriver ekvationen på matrisform

$$x^T Ax + Kx + 4 = 0,$$

där

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad K = \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & -16\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Vi ortogonalt diagonaliserar den symmetriska matrisen A. Dettta innebär att vi beräknar en ortogonal matris P (vars kolonner är ortogonala egenvektorer till A)

Egenvärden till A:

$$c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36$$

Egenvärdena blir $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = 9$.

Egenvektorerna blir, $\lambda_1 = 4$:

$$0 = A - \lambda I = \left] \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array} \right] \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

På samma sätt får vi att egenvektorerna till $\lambda_2 = 9$ blir

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} t$$

som ger oss egenvektorerna

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Vektorerna är naturligtvis ortogonal (de är ju egenvektorer till två olika egenvärden till en symmetrisk matris och ska därför vara ortogonala). Normerar vi dessa och ställer in dem i en matri så har vi vår ortogonalt diagonliserande matris P:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrisen P ger oss basbyte $x = Px'$:

$$x' \underbrace{P^T AP}_{=D} x' + KPx' + 4 = 0$$

Vilket ger oss

$$[x'^2, y'^2] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 4 = 0$$

Utvecklar vi alla matrisprodukter så får vi

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0$$

Kvadratkomplettera i x' och y' för sig:

$$4(x-1)^2 - 4 + 9(y'-2)^2 - 36 + 4 = 0$$

som förenklas och blir

$$4(x-1)^2 + 9(y'-2)^2 = 36$$

Substitutionen $x'' = x' - 1$ och $y'' = y' - 2$ ger oss den slutliga förenklingen

$$4x''^2 + 9y''2 = 36$$

som också kan skrivas som

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

I de de dubbelprimmade koordinaterna så är ellipsens centrum i origo, i de primmade koordinaterna så ligger centrum i $(1, 2)$. För att beräkna centrum i de oprimmade koordinaterna så behöver vi använda att $x = Px'$ och då får vi centrumkoordinaterna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$$