HÖGSKOLAN I GÄVLE
TM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

Matematik med datalogi, mfl.
LINJÄR ALGEBRA
ma041a
2016 01 20

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

FRÅGORNA 1 TILL 6 SKA SVARAS MED ETT KRYSS FÖR VARJE KORREKT PÅSTÅENDE. VARJE UPPGIFT GER 1 POÄNG. ANVÄND BIFOGAT FORMULÄR FÖR DESSA 6 FRÅGOR.

1. Betrakta ekvationssystemet $Ax = b$, där A är en $m \times n$-matris och b en nollskilld vektor. Markera de påståenden som inte är sanna
   (a) x ligger i nollrummet till A
   (b) x ligger i $\mathbb{R}^n$
   (c) b ligger i kolonnrummet till A
   (d) b ligger i radrummet till A
   (e) b ligger i $\mathbb{R}^m$

2. Låt $v_1, \ldots, v_n$ vara linjärt beroende vektorer i $\mathbb{R}^n$ och låg A vara matrisen som har vektorerna som rader. Markera de påståenden som inte är sanna.
   (a) A har rang n
   (b) Vektorerna spänner upp ett delrum av $\mathbb{R}^n$.
   (c) Vektorerna bildar en bas för ett delrum.
   (d) $x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = 0$ har icketriviala lösningar.
   (e) $Ax = b$ är inkonsistent för vissa $b \in \mathbb{R}^n$.

3. Låt A och B vara två $n \times n$-matriser
   Ange de påståenden som inte är sanna
   (a) Om $AB = I$ så är $BA = I$
   (b) $AB = BA$
   (c) $(AB)^T = A^TB^T$
   (d) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
   (e) $\det AB = \det A \det B$

4. Låt A vara en $n \times n$-matris
   Ange de påståenden som inte är sanna

   A är diagonaliserbar om

   (a) A^{-1} existerar
   (b) A är symmetrisk
   (c) A har n stycken olika egenvärden
   (d) multipliciteten för varje egenvärde är lika med dimensionen för dess egenrum.
   (e) A har n stycken linjärt beroende egenvektorer.

5. Låt A vara en $n \times n$-matris
   Ange de påståenden som inte är ekvivalent med att A är inverterbar

   (a) Kolonnerna för A bildar en bas för $\mathbb{R}^n$
   (b) A's rang är n
   (c) Systemet $Ax = 0$ har icketriviala lösningar.
   (d) Raderna för A är linjärt oberoende
   (e) $\det A = 0$

6. Låt $b_1, \ldots b_m$ vara en ON-bas för ett delrum W av $\mathbb{R}^n$ och låt $u \in \mathbb{R}^n$
   Ange de påståenden som inte är sanna

   (a) $b_i \bullet b_j = 0$ för $i, j = 1, \ldots m$
   (b) $u \in Span\{b_1, \ldots, b_m\}$
   (c) $\mathbf{proj}_W u = (u \bullet b_1)b_1 + \cdots + (u \bullet b_m)b_m$
   (d) $u - \mathbf{proj}_W$ är ortogonal mot W.
   (e) $u \in W$ om $x_1 b_1 + \cdots + x_m b_m = u$ är konsistent.

Frågorna 7-9 ger 3 poäng vardera

7. Lös vektorekvationen

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8. Beräkna matrisen för den linjära avbildning från $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som först roterar vektorerna med $90°$ sedan speglar i x-axeln och slutligen roterar vektorerna med $-90°$.

9. Beräkna projektionen av vektorn $v = (1, 2, 0)$ ned i planet W som ges av ekvationen $x + 3y - 2z = 0$

Uppgifterna 10 -14 kräver fullständiga och väl motiverade lösningar. Uppgifterna ger 5 poäng vardera

10. Beräkna baser för rad, kolonn och nollrum till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

11. Bestäm de värden på parametern t som gör att systemet $M(t)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$M(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & t & -2 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

har

(a) unik lösning,

(b) många lösningar,

(c) saknar lösningar.

12. Beräkna den ellips på formen $ax^2 + by^2 = 1$ som i minstakvadratmening bäst anpassar sig till punkterna

$$(-2, 0), (1, -1), (2, 1), (-1, 1)$$

13. Beräkna en ON-bas för radrummet till följande matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

14. Beskriv lösningarna, t.ex. geometriskt, till följande kvadratiska ekvation

$$x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$$

genom att först beräkna det ortogonala koordinatbyte (en rotation) som diagonaliserar dess kvadratiska form och sedan kvadratkomplettera för att translatera så att centrum hamnar i origo.

Svar till tentamen i Linjär algebra, 2016 01 20 .

1. a och d

2. a, c

3. b och c

4. a, e

5. c, e

6. a, b

7. $x = -7$, $y = 7$, $z = -2$.

8. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

10. Radrummets bas : $\{(1,0,2,3,1),(0,1,0,-1,0)\}$
Kolonnrummets bas:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Nollrummets bas

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

11. (a) $t \neq 4$, $t \neq -1$

    (b) $t = -1$

    (c) $t = 4$

12. $\frac{2}{11}x^2 + \frac{7}{11}y^2 = 1$

13.

14.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, 2016 01 20 .

1.

2.

3.

4.

5.

6. (a) a är falsk eftersom $b_i \bullet b_i = ||b_i|| = 1$

(b) b är falsk eftersom det bara står att u ligger i $\mathbb{R}^n$.

7. Ställ upp på matrisform och Gauss-Jordan eliminera

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

8. En allmän rotation ges av matrien (α ska vara i radianer)

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

De tre operationernas matriser blir

$$R_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R_{-90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad S_{x=y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu måste dessa multipliceras ihop i rätt ordning, den första ska stå längst till höger och de övriga till vänster om denna. Vår matris blir alltså produkten

$$M = R_{-90^\circ} S_{x=y} R_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det går också lösa uppgiften genom att se vad som händer med standardbasvektorerna när vi gör de tre operationerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ställer man upp de vektorer som vi till slut får som kolonner i en matris så har vi vår transformationsmatris. Se figur 1

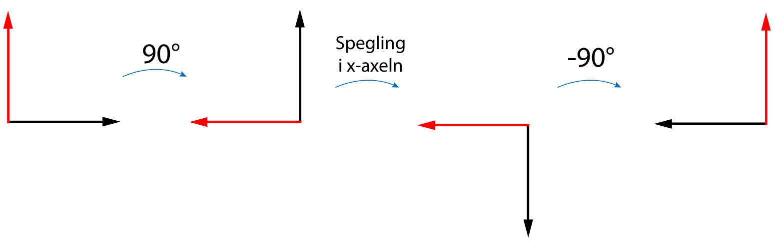

Figure 1: Hur de tre avbildningarna transformerar standardbasen

9. Projicera vektorn på planets normalvektor och subtrahera denna projektion från v så har vi projektionen ned i planet. Planets normalvektor är

$$n = (1, 3, -2)$$

Projektionen av v på normalvektorn blir

$$\mathbf{proj}_n v = \frac{v \bullet n}{||n||^2} n = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \quad = \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Projektionen ned i planet blir slutligen

$$\mathbf{proj}_W v = v - \mathbf{proj}_n v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En snabb kontroll visar att denna projektion är ortogonal mot projektion till normalvektorn, vilket den ska vara!

10. Börja med att Gauss-Jordan-eliminera A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Från den reducerade matrisen har vi att de nollskilda raderna är en bas för radrummet. Eftersom de ledande elementen står i första och andra kolonnen så är första och andra kolonnen i A en bas för kolonnrummet.

Nollrummet ges nu av att vi uttrycker de ledande variablerna x_1 och x_2 mha de fria variablern $x_3 = s$, $x_4 = t$ och $x_5 = u$. Vi använder den reducerade matrisens nollskilda rader för att göra detta. Vi har från första raden:

$$x_1 = -2x_3 - 3x_4 - x_5 = -2s - 3t - u$$

och från andra raden så får vi att $x_2 = x_4 = t$. Vi kan nu uttrycka nollrummet som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

där de tre vektorerna är basen för nollrummet till A.

11. Genom att beräkna determinanten så kan vi bestämma de värden på t som gör att determinanten är noll.

$$\det M(t) = (t - 4)(t + 1)$$

Här ser vi att vi har $t = 4$ och $t = -1$ som gör determinanten noll. För övriga värden på t är $M(t)$ inverterbar vilket innebär att ekvationen då har unik lösning, $\mathbf{x} = M(t)^{-1}\mathbf{b}$. Vi måste nu studera systemet för $t = 4$ och $t = -1$ och se hur lösningarna ser ut för dessa.

$\boxed{t = -1 ::}$ Systemet blir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Detta system är konsistent med en fri variabel och ger oss alltså många lösningar.

$\boxed{t = 4 ::}$ Systemet blir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Eftersom det ledande elementet i den nedersta raden står i höger led så är detta system inkonsistent och systemet saknar lösningar alltså lösningar om $t = 4$.

12. Punkterna insatt i ellipsens ekvation ger oss följande system i ellipsens koeffecienter a och b:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicerar vi båda led med A^T så får vi systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 34 & 6 & 10 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{7}{11} \end{array}\right]$$

Och den bäst anpassade ellipsen blir alltså

$$\frac{2}{11}x^2 + \frac{7}{11}y^2 = 1$$

13. Börja med att radreducera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Här ser vi att vår bas har en vektor som är är helt färdig

$$b_1 = (0, 0, 0, 1)$$

och två vektorer som redan är ortogonal mot b_1. Normerar vi den ena av dessa så har vi

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)$$

Vi projicerar sedan den tredje vektorn $v = (1, 0, 3, 0)$ på de båda basvektorerna och subtraherar dem från v:

$$v = v - \mathbf{proj}_{b_1} v - \mathbf{proj}_{b_2} v$$

Normalisering ger sedan

$$b_3 = \frac{v}{||v||} = \frac{1}{\sqrt{22}}(2, 3, 3, 0)$$

14. Skriver vi ekvationen på matrisform så får vi

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 9 = 0$$

Vi diagonaliserar 2×2-matrisen (kalla den Q) och börjar med att beräkna egenvärden:

$$\det(Q - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & -7-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda - 16 = (\lambda - 2)(\lambda + 8),$$

där vi fick fram faktoriseringen genom att beräkna andragradspolynomets nollställen.

Vi beräknar nu egenvektorerna.

$\boxed{\lambda = 2 ::}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som ger oss normaliserad egenvektor:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda = -8 ::}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som ger oss den normaliserade egenvektorn

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Med observationen/kontrollen att de båda egenvektorerna faktiskt är ortogonala så kan vi ställa upp den ortogonala matrisen som diagonaliserar vår form:

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Här har jag valt ordningen så att determinanten blir 1, vilket innebär att variabelbytet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

är en rotation. Med detta variabelbyte så blir vår ekvation

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} P^T Q P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + 9 = 0$$

Som blir

$$-8x^2 + 2Y^2 + \frac{16}{\sqrt{10}} X - \frac{28}{\sqrt{10}} Y + 9$$

Kvadratkomplettering i X och Y för sig ger

$$-8(X + \frac{1}{\sqrt{10}})^2 + 2(Y - \frac{7}{\sqrt{10}})^2 = 0$$

Detta ger att vår ekvation kan skrivas som

$$8(X + \frac{1}{\sqrt{10}})^2 = 2(Y - \frac{7}{\sqrt{10}})^2$$

Som ger oss två räta linjer som skär varandra i $(X, Y) = (-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{7}{\sqrt{10}}) = p_o$.

Sätter man

$$s = X + \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \text{och} \quad t = Y - \frac{7}{\sqrt{10}}$$

så får blir vårt system

$$8s^2 = 2t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 4s \quad \Rightarrow \quad t = \pm 2s$$

som är två linjer i (s, t)planet som har origo i p_o och är roterat i förhållande till (x, y) koordinaterna i enlighet med matrisen P. Vinkeln kan α uppfyller $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ vilket ger en vinkel på ungefär $71.56°$, men det var ju inget vi frågade efter.