

*Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.*

*Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.*

**FRÅGORNA 1 TILL 6 SKA SVARAS MED ETT KRYSS FÖR VARJE KORREKT PÅSTÅENDE. VARJE UPPGIFT GER 1 POÄNG. ANVÄND BIFOGAT FORMULÄR FÖR DESSA 6 FRÅGOR.**

1. Betrakta ekvationssystemet  $Ax = b$ , där  $A$  är en  $m \times n$ -matris och  $b$  en nollskilld vektor. Markera de påståenden som inte är sanna
  - (a)  $x$  ligger i nollrummet till  $A$
  - (b)  $x$  ligger i  $\mathbb{R}^n$
  - (c)  $b$  ligger i kolonnrummet till  $A$
  - (d)  $b$  ligger i radrummet till  $A$
  - (e)  $b$  ligger i  $\mathbb{R}^m$
2. Låt  $v_1, \dots, v_n$  vara linjärt beroende vektorer i  $\mathbb{R}^n$  och låg  $A$  vara matrisen som har vektorerna som rader. Markera de påståenden som inte är sanna.
  - (a)  $A$  har rang  $n$
  - (b) Vektorerna spänner upp ett delrum av  $\mathbb{R}^n$ .
  - (c) Vektorerna bildar en bas för ett delrum.
  - (d)  $x_1v_1 + \dots + x_nv_n = 0$  har icke-triviala lösningar.
  - (e)  $Ax = b$  är inkonsistent för vissa  $b \in \mathbb{R}^n$ .
3. Låt  $A$  och  $B$  vara två  $n \times n$ -matriser. Ange de påståenden som inte är sanna
  - (a) Om  $AB = I$  så är  $BA = I$
  - (b)  $AB = BA$
  - (c)  $(AB)^T = A^T B^T$
  - (d)  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
  - (e)  $\det AB = \det A \det B$

4. Låt  $A$  vara en  $n \times n$ -matris

Ange de påståenden som inte är sanna

$A$  är diagonaliserbar om

- (a)  $A^{-1}$  existerar
- (b)  $A$  är symmetrisk
- (c)  $A$  har  $n$  stycken olika egenvärden
- (d) multipliciteten för varje egenvärde är lika med dimensionen för dess egenrum.
- (e)  $A$  har  $n$  stycken linjärt beroende egenvektorer.

5. Låt  $A$  vara en  $n \times n$ -matris

Ange de påståenden som inte är ekvivalent med att  $A$  är inverterbar

- (a) Kolonnerna för  $A$  bildar en bas för  $\mathbb{R}^n$
- (b)  $A$ 's rang är  $n$
- (c) Systemet  $Ax = 0$  har icke-triviala lösningar.
- (d) Raderna för  $A$  är linjärt oberoende
- (e)  $\det A = 0$

6. Låt  $b_1, \dots, b_m$  vara en ON-bas för ett delrum  $W$  av  $\mathbb{R}^n$  och låt  $u \in \mathbb{R}^n$

Ange de påståenden som inte är sanna

- (a)  $b_i \bullet b_j = 0$  för  $i, j = 1, \dots, m$
- (b)  $u \in \text{Span}\{b_1, \dots, b_m\}$
- (c)  $\text{proj}_W u = (u \bullet b_1)b_1 + \dots + (u \bullet b_m)b_m$
- (d)  $u - \text{proj}_W u$  är ortogonal mot  $W$ .
- (e)  $u \in W$  om  $x_1 b_1 + \dots + x_m b_m = u$  är konsistent.

FRÅGORNA 7-9 GER 3 POÄNG VARDERA

7. Lös vektorekvationen

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8. Beräkna matrisen för den linjära avbildning från  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  som först roterar vektorerna med  $90^\circ$  sedan speglar i  $x$ -axeln och slutligen roterar vektorerna med  $-90^\circ$ .

9. Beräkna projektionen av vektorn  $v = (1, 2, 0)$  ned i planet  $W$  som ges av ekvationen  $x + 3y - 2z = 0$

UPPGIFTERNA 10 -14 KRÄVER FULLSTÄNDIGA OCH VÄL MOTIVERADE LÖSNINGAR.  
UPPGIFTERNA GER 5 POÄNG VARDERA

10. Beräkna baser för rad, kolonn och nollrum till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

11. Bestäm de värden på parametern  $t$  som gör att systemet  $M(t)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , där

$$M(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & t & -2 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

har

- (a) unik lösning,
- (b) många lösningar,
- (c) saknar lösningar.

12. Beräkna den ellips på formen  $ax^2 + by^2 = 1$  som i minstakvadratmening bäst anpassar sig till punkterna

$$(-2, 0), (1, -1), (2, 1), (-1, 1)$$

13. Beräkna en ON-bas för radrummet till följande matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

14. Beskriv lösningarna, t.ex. geometriskt, till följande kvadratiska ekvation

$$x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$$

genom att först beräkna det ortogonala koordinatbyte (en rotation) som diagonaliserar dess kvadratiska form och sedan kvadratkomplettera för att translatera så att centrum hamnar i origo.

Svar till tentamen i Linjär algebra, 2016 01 20 .

1. a och d

2. a, c

3. b och c

4. a, e

5. c, e

6. a, b

7.  $x = -7, y = 7, z = -2.$

8.  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

9.  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

10. Radrummets bas :  $\{(1, 0, 2, 3, 1), (0, 1, 0, -1, 0)\}$

Kolonnummets bas:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Nollrummets bas

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

11. (a)  $t \neq 4, t \neq -1$

(b)  $t = -1$

(c)  $t = 4$

12.  $\frac{2}{11}x^2 + \frac{7}{11}y^2 = 1$

13.

14.

## Lösningar till tentamen i Linjär algebra, 2016 01 20 .

1.

2.

3.

4.

5.

6. (a) a är falsk eftersom  $b_i \bullet b_i = \|b_i\|^2 = 1$

(b) b är falsk eftersom det bara står att  $u$  ligger i  $\mathbb{R}^n$ .

7. Ställ upp på matrisform och Gauss-Jordan eliminera

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

8. En allmän rotation ges av matrisen ( $\alpha$  ska vara i radianer)

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

De tre operationernas matriser blir

$$R_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_{-90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{x=y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu måste dessa multipliceras ihop i rätt ordning, den första ska stå längst till höger och de övriga till vänster om denna. Vår matris blir alltså produkten

$$M = R_{-90^\circ} S_{x=y} R_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det går också lösa uppgiften genom att se vad som händer med standardbasvektorerna när vi gör de tre operationerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ställer man upp de vektorer som vi till slut får som kolonner i en matris så har vi vår transformationsmatris. Se figur 1

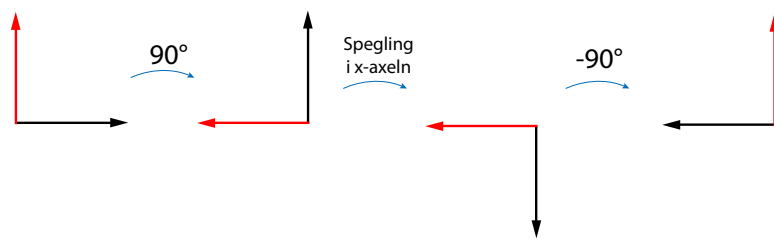


Figure 1: Hur de tre avbildningarna transformerar standardbasen

9. Projicera vektorn på planets normalvektor och subtrahera denna projektion från  $v$  så har vi projektionen ned i planet. Planets normalvektor är

$$n = (1, 3, -2)$$

Projektionen av  $v$  på normalvektorn blir

$$\mathbf{proj}_n v = \frac{v \cdot n}{\|n\|^2} n = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Projektionen ned i planet blir slutligen

$$\mathbf{proj}_W v = v - \mathbf{proj}_n v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En snabb kontroll visar att denna projektion är ortogonal mot projektion till normalvektorn, vilket den ska vara!

10. Börja med att Gauss-Jordan-eliminera  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Från den reducerade matrisen har vi att de nollskillda raderna är en bas för radrummet. Eftersom de ledande elementen står i första och andra kolonnen så är första och andra kolonnen i  $A$  en bas för kolonnrummet.

Nollrummet ges nu av att vi uttrycker de ledande variablerna  $x_1$  och  $x_2$  mha de fria variablerna  $x_3 = s$ ,  $x_4 = t$  och  $x_5 = u$ . Vi använder den reducerade matrisens nollskilda rader för att göra detta. Vi har från första raden:

$$x_1 = -2x_3 - 3x_4 - x_5 = -2s - 3t - u$$

och från andra raden så får vi att  $x_2 = x_4 = t$ . Vi kan nu uttrycka nollrummet som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

där de tre vektorerna är basen för nollrummet till  $A$ .

11. Genom att beräkna determinanten så kan vi bestämma de värden på  $t$  som gör att determinanten är noll.

$$\det M(t) = (t - 4)(t + 1)$$

Här ser vi att vi har  $t = 4$  och  $t = -1$  som gör determinanten noll. För övriga värden på  $t$  är  $M(t)$  inverterbar vilket innebär att ekvationen då har unik lösning,  $\mathbf{x} = M(t)^{-1}\mathbf{b}$ . Vi måste nu studera systemet för  $t = 4$  och  $t = -1$  och se hur lösningarna ser ut för dessa.



$t = -1 ::$  Systemet blir

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Detta system är konsistent med en fri variabel och ger oss alltså många lösningar.

$t = 4 ::$  Systemet blir

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Eftersom det ledande elementet i den nedersta raden står i höger led så är detta system inkonsistent och systemet saknar lösningar alltså lösningar om  $t = 4$ .

**12.** Punkterna insatt i ellipsens ekvation ger oss följande system i ellipsens koefficienter  $a$  och  $b$ :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Multipliserar vi båda led med  $A^T$  så får vi systemet

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 34 & 6 & 10 \\ 6 & 3 & 3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{7}{11} \end{array} \right]$$

Och den bäst anpassade ellipsen blir alltså

$$\frac{2}{11}x^2 + \frac{7}{11}y^2 = 1$$

**13.** Börja med att radreducera:

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Här ser vi att vår bas har en vektor som är helt färdig

$$b_1 = (0, 0, 0, 1)$$

och två vektorer som redan är ortogonal mot  $b_1$ . Normerar vi den ena av dessa så har vi

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)$$

Vi projicerar sedan den tredje vektorn  $v = (1, 0, 3, 0)$  på de båda basvektorerna och subtraherar dem från  $v$ :

$$v = v - \mathbf{proj}_{b_1} v - \mathbf{proj}_{b_2} v$$

Normalisering ger sedan

$$b_3 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{22}}(2, 3, 3, 0)$$

14. Skriver vi ekvationen på matrisform så får vi

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 9 = 0$$

Vi diagonaliserar  $2 \times 2$ -matrisen (kalla den  $Q$ ) och börjar med att beräkna egenvärden:

$$\det(Q - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -3 \\ -3 & -7 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda - 16 = (\lambda - 2)(\lambda + 8),$$

där vi fick fram faktoriseringen genom att beräkna andragradspolynomets nollställen.

Vi beräknar nu egenvektorerna.

$$\boxed{\lambda = 2 ::}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -9 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

som ger oss normaliserad egenvektor:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = -8 ::}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

som ger oss den normaliserade egenvektorn

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Med observationen/kontrollen att de båda egenvektorerna faktiskt är ortogonala så kan vi ställa upp den ortogonala matrisen som diagonaliserar vår form:

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Här har jag valt ordningen så att determinanten blir 1, vilket innebär att variabelbytet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

är en rotation. Med detta variabelbyte så blir vår ekvation

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} P^T Q P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + 9 = 0$$

Som blir

$$-8x^2 + 2Y^2 + \frac{16}{\sqrt{10}}X - \frac{28}{\sqrt{10}}Y + 9$$

Kvadratkomplettering i  $X$  och  $Y$  för sig ger

$$-8\left(X + \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + 2\left(Y - \frac{7}{\sqrt{10}}\right)^2 = 0$$

Detta ger att vår ekvation kan skrivas som

$$8\left(X + \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 2\left(Y - \frac{7}{\sqrt{10}}\right)^2$$

Som ger oss två räta linjer som skär varandra i  $(X, Y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{7}{\sqrt{10}}\right) = p_o$ .

Sätter man

$$s = X + \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \text{och} \quad t = Y - \frac{7}{\sqrt{10}}$$

så får blir vårt system

$$8s^2 = 2t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 4s \quad \Rightarrow \quad t = \pm 2s$$

som är två linjer i  $(s, t)$ planet som har origo i  $p_o$  och är roterat i förhållande till  $(x, y)$  koordinaterna i enlighet med matrisen  $P$ . Vinkeln  $\alpha$  uppfyller  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$  vilket ger en vinkel på ungefär  $71.56^\circ$ , men det var ju inget vi frågade efter.