HÖGSKOLAN
I GÄVLE
TM-Matematik
Mikael Forsberg, 0734-41 23 31
Rolf Källström, 070-622 93 09

För Campus och Distans
LINJÄR ALGEBRA
mag041 och ma014a
2016 05 20

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

FRÅGORNA 1 TILL 6 SKA SVARAS MED KRYSS PÅ DET BIFOGADE SVARSFORMULÄRET, 0.5 P FÖR VARJE RÄTT KRYSS. TVÅ RÄTTA SVAR PÅ VARJE FRÅGA, FLER KRYSS ÄN TVÅ GER NOLL PÅ UPPGIFTEN.

1. I den här uppgiften är $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ tredimensionella vektorer. Vilka av följande delmängder av $\mathbb{R}^3$ är delrum till $\mathbb{R}^3$?
   (a) Mängden av alla $\mathbf{x} = (x, y, z)$ som uppfyller $x + y = 3z$.
   (b) Mängden av alla $\mathbf{x} = (x, y, z)$ som uppfyller $x + y + z = 1$.
   (c) $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$
   (d) Mängden av alla $\mathbf{x}$ som uppfyller $\mathbf{x} = s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v} + (1, 0, 0)$, där $s, t \in \mathbb{R}$.
   (e) Mängden av alla $\mathbf{x}$ som uppfyller $\mathbf{x} = s \cdot \mathbf{u}$ där s är ickenegativ, $s \geq 0$.

2. Låt avbildningen L ges genom att först utföra speglingen S_x i x-axeln och sedan rotationen med vinkeln α moturs, R_α. Om vi låter L, S_x och R_α också beteckna matriserna för de tre avbildningarna ange vilka av följande påståenden som är sanna.
   (a) $L = S_x R_\alpha$
   (b) $L = R_\alpha S_x$
   (c) $L^{-1} = R_\alpha^{-1} S_x^{-1}$
   (d) $L^{-1} = S_x^T R_\alpha^{-1}$
   (e) $L^{-1} = S_x^{-1} R_\alpha^{-1}$

3. Denna uppgift handlar om matrisen A med dess radreducerade matris $\tilde{A}$.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \sim \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   Vilka av följande fem påståenden är sanna?
   (a) Raderna i A är linjärt oberoende.
   (b) Raderna i A bildar en bas för $\mathbb{R}^4$.
   (c) Nollrummet till A är 1-dimensionellt.
   (d) Raderna i A är linjärt beroende.
   (e) Systemet $Ax = 0$ har endast triviala lösningen.

4. I den här uppgiften är A en inverterbar $3x3$ matris med inversen A^{-1}. B och C är två andra inverterbara $3x3$ matriser och vi undrar vilka av följande påståenden är sanna om den obekanta matrisen X som uppfyller matrisekvationen

$$B + AX = C$$

   (a) $X = A^{-1}(C - B)$
   (b) $X = (C - B)A^{-1}$
   (c) $X = A^{-1}(B - C)$
   (d) $X = A^{-1}C - A^{-1}B$
   (e) $X = CA^{-1} - BA^{-1}$

5. I den här uppgiften är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ två tredimensionella vektorer och $\mathbf{w} = a\mathbf{u}+b\mathbf{v}$ en linjärkombination. Ange vilka av följande påståenden som är sanna.

   (a) $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||$ beräknar arean av det parallellogram som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp.
   (b) Vinkeln mellan $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är noll.
   (c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w}$ är en vektor vinkelrät mot $\mathbf{w}$
   (d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ är vinkelrät mot både u och v.
   (e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ ligger i planet som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp.

6. Vilka av följande påståenden ger ett tillräckigt villkor för att en 3×3 matris A ska vara diagonaliserbar?

   (a) Matrisen har tre egenvärden räknade med multiplicitet som nollställen till karakteristiska polynomet.
   (b) Matrisen är lika med sitt transponat: $A = A^T$.
   (c) För varje egenvärde till matrisen så är algebraiska multipliciteten är lika med dimensionen för egenvärdets egenrum,
   (d) Matrisen är inverterbar.
   (e) Matrisen är ortogonal.

Frågorna 7-9 ger 3 poäng vardera

7. Beräkna alla lösningar till ekvationssystemet $Ax = b$, där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

8. Den här uppgiften handlar om matrisen A och dess radreducerade matris $\tilde{A}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 10 & -3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & 2 & 11 \\ -2 & -4 & -1 & 2 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 4 & -3 & -1 & -6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A}$$

Beräkna baser för radrum, kolonnrum och nollrum till matrisen A.

9. Beräkna determinanten för följande 4×4-matris:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

UPPGIFTERNA 10 -14 KRÄVER FULLSTÄNDIGA OCH VÄL MOTIVERADE LÖSNINGAR. UPPGIFTERNA GER 5 POÄNG VARDERA

10. Denna uppgift handlar om matrisen $M(n)$, som beror av den reella variabeln n:

$$M(n) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & n & -1 \\ 1 & 1 & -n \end{bmatrix}$$

(a) Beräkna de värden på n som gör att matrisen saknar invers.

(b) Beräkna inversen till matrisen $M(n)$ där n är det minsta positiva heltalsvärde på n som gör att matrisen har invers

11. (a) Beräkna matriserna för spegling i x-axeln, spegling i y-axeln, samt rotationen med $\pi/2$ moturs.

(b) Använd matriserna från uppgift a för att beräkna matrisen för den avbildning som bildas då vi först roterar med $\pi/2$ moturs, sedan speglar i y-axeln och slutligen speglar i x-axeln.

(c) Om vi sammansätter tre speglingar, kan detta ge oss samma resultat som en eller flera rotationer? Motivera!

12. Den här uppgiften söker den kurva på formen $y = ax + b\sqrt{x}$ som i minstakvadratmening bäst anpassar sig till (x, y)-punkterna $(0, 1)$, $(1, 0)$ och $(4, 2)$.

(a) Skriv ned de tre ekvationerna som skulle vara uppfyllda *om* kurvan passerade genom alla tre punkterna.

(b) Beräkna koeffecienterna a och b för den bäst anpassade kurvan $y = ax + b\sqrt{x}$.

13. Basen A's vektorer är givna i standardbasen, mha kolonnerna i matrisen A_S. När man uttrycker basen A's vektorer m.a.p en annan bas B får man kolonnerna i matrisen A_B.

$$A_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna basen B uttryckt i Standardbasen.

14. Beskriv lösningarna till den kvadratiska ekvationen

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 - 16\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y + 26 = 0$$

genom att diagonalisera den kvadratiska formen och kvadratkomplettera och göra lämpliga variabelbyten så att uttrycket skrivs på formen

$$a\mathbb{X}^2 + b\mathbb{Y}^2 = 1$$

Svar till tentamen i Linjär algebra, 2016 05 20.

1. a, c
2. b, e
3. c och d
4. a, d
5. a, e
6. b, c
7.
8.
9. $$\det M = 1$$
10.
11.
12.
13.
14.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, 2016 05 20.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7. Vi ställer upp systemet på utvidgad matris form och eliminerar

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Från den eliminerade matrisen läser vi av att x och y är ledande variabler medan z är fri eftersom tredje kolonnen saknar ledande element. Vi sätter $z = t$ och använder de två nollskillda raderna för att lösa ut x och y:

$$x = z + 2 = t + 2, \qquad y = -z - 1 = -t - 1 \quad \text{och, som sagt} \quad z = t$$

Om vi ger detta svar på vektorparameterform har vi nu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. De nollskillda raderna i $\tilde{A}$ är bas för radrum. De ledande elementen i matrisen $\tilde{A}$ står i kolonnerna ett, tre och fyra. Vektorerna i motsvarande kolonner i matrisen A är bas för kolonnrummet. För nollrummet så behöver vi lägga till ett högerled med nollor till $\tilde{A}$:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ur denna matris kan vi nu läsa ut lösningarna till $\tilde{A}x = 0$ som också är lösningarna till $Ax = 0$ som är nollrummet till matrisen A. De kolonner som inte har ledande element, dvs 2, 4 och 5 är fria variabler: $x_2 = s$, $x_4 = t$ och $x_5 = u$. Vi uttrycker de ledande variablerna mha de fria:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - x_5 - 2x_6 = -2s - t - 2u \\ x_2 &= s \\ x_3 &= -3x_5 - 2x_6 = -3t - 2u \\ x_4 &= x_5 - 3x_6 = t - 3u \\ x_5 &= t \\ x_6 &= u \end{aligned}$$

På vektorform har vi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

där de tre vektorerna i höger led är basen för vårt nollrum.

9. Man beräknar lämpligen determinanten av 4×4-matrisen mha kofaktorutveckling längs andra kolonnen. Detta ger en förenklingar tack vare att denna kolonn innehåller många nollor. Detta ger det första stegen i nedanstående räkningar. I de följande stegen gör vi två radbyten (varje radbyte ger ett teckenbyte och två radbyten ger oss ingen teckenförändring. Sedan gör vi radoperationer som inte förändrar determinanten tills vi får en triangulär matris och determinanten är då produkten av diagonalelementen:

$$\begin{aligned}
\det M &= \underbrace{(-1)^{3+2}(-1)}_{=1} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \\
&= \text{ två radbyten ger ingen förändring av determinanten } = \\
&= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \\
&= \text{tre enkla radoperationer ger ingen förändring av determinenten} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \text{determinanten för triangulär matris är produkten av diagonalelementen } = \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

10. Matrisen saknar invers precis om determinanten är noll. Vi beräknar determinanten:

$$\det M(n) = 2 - 2n^2$$

som är noll precis om om $n = \pm 1$. Det minsta positiva värde på n som gör matrisen inverterbar är därför $n = 2$ (Observera att vi normalt inte betraktar noll som positivt, även om det finns en del matematiktänkare som använder att noll är positivt, men då är också noll negativt och det enda tal som både betraktas som positivt och negativt. Den som väljer $n = 0$ gör alltså inte fel och vi kommer acceptera en invers för detta värde också, förutsatt att den är korrekt uträknad.)

ex: Bourbaki. Se Kiselman, Vad är ett naturligt tal?

Sedan behöver vi beräkna inversen, dvs eliminera den utvidgade matrisen $M(0)^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Inversen $M[2]^{-1}$::

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

11. (a) Matriserna för de olika operationerna kan man beräkna genom att följa vad som händer med standardbasvektorern. Om vi betecknar spegling i x-axeln med S_x, spegling i y-axeln med S_y och rotationen moturs med $\pi/2$ med R_{90° så har vi

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad R_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Matrisen M som söks blir produkten av de tre matriserna i rätt ordning. Den första operationens matris ska stå längst till höger och de andra till vänster om denna. Vi får

$$M = S_x \cdot S_y \cdot R_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) En spegling byter orienteringen (den ordning som axlarna kommer) för vårt rum. T.ex. speglingen i linjen $y = x$ gör att x och y axlarna byter plats och får därför motsatt orientering. Detta kan aldrig åstadkommas mha en rotation. Ett jämnt antal speglingar ger oss den normala orienteringen tillbaka och detta innebär att ett jämnt antal speglingar kan ge oss en rotation. Ett udda tal speglingar ger oss igen ett orienteringsbyte och kan inte ge oss en rotation.

En rotation känns igen av att determinanten för matrisen är $+1$ och en spegling av att determinanten är -1. Kombinerar vi tre godtyckliga speglingar S_1, S_2 och S_3 så får vi

$$\det(S_1 \cdot S_2 \cdot S_3) = \det S_1 \cdot \det S_2 \cdot \det S_3 = (-1)^3 = -1$$

som alltså är en spegling. Om vi sätter samman rotationer så ger sammansättningen alltid determinanten $+1$. Hur vi än kombinerar rotationsmatriser kommer vi aldrig kunna få en negativ determinant och detta innebär att vi aldrig kan ersätta tre speglingar med en kombination av rotationer.

12. (a) De tre ekvationerna blir

$$\begin{aligned} 0 \cdot a + 0 \cdot b &= 1 \\ a + b &= 0 \\ 4a + 2b &= 2 \end{aligned}$$

När vi skriver systemet på matrisform får vi systemet $AX = B$, där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(b) Vi ställer upp normalekvationen $A^TAX = A^TB$:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A^TB = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi radreducerar den utvidgade matrisen $[A^TA|A^TB]$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 17 & 9 & 8 \\ 9 & 5 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right],$$

vilket betyder att $a = 1$ och $b = -1$ som ger oss att $y = x - \sqrt{x}$ är den bäst anpassade kurvan.

13. Matrisen A_S utför vektorer uttryckta i basen A till vektorer uttryckta standardbasen. Matrisen A_B överför vektorer uttryckta i A till vektorer uttryckta i B

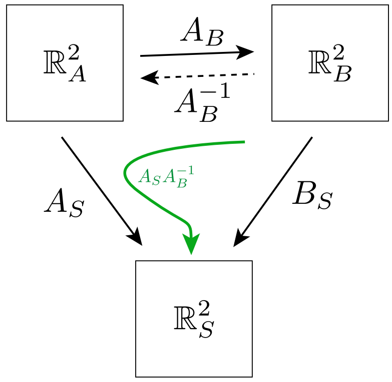

Figure 1: $\mathbb{R}^2_A$, $\mathbb{R}^2_B$ och $\mathbb{R}^2_S$är koordinatrummen m.a.p baserna A, B och S. Detta gör att basbytesmatriserna är avbildningar mellan dessa koordinatrum. Vi söker matrisen B_S som vi kan beräkna genom att först använda A_B^{-1} och sedan använda A_S

Vår situation kan beskrivas som i figur 1

Från figuren kan vi se att den matris vi söker är $A_S A_B^{-1}$

Vi beräknar först inversen

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

och sedan produkten

$$A_S A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

14. (a) Vi börjar med att skriva ekvationen på matrisform.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 26 = 0$$

(b) Diagonalisera matrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

till den kvadratiska formen: Det karakteristiska polynomet:

$$\det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1$$

ger oss egenvärdena $\lambda = 4$ och $\lambda = 6$. Egenvektorerna

$$\lambda = 4 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 6 \quad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagonaliserande matris blir

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

som är en rotation eftersom dess determinant är +1. Notera att matrisen också är ortogonal eftersom dess kolonnvektorer är ortogonala och har längden 1. Detta gör att $P^{-1} = P^T$.

(c) Utför variabelbytet (som är en rotation tack vare att $\det P = 1$)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} P^T$$

Vår kvadratiska ekvation blir nu

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \underbrace{P^T \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} P}_{= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + 26 = 0$$

Räknar vi samman detta får vi att vår kvadratiska ekvation transformerats till

$$3X^2 - 12X + 2Y^2 + 4Y + 13 = 0,$$

där vi också dividerat båda led med 2.

(d) Nu kvadratkompletterar vi m.a.p. X och Y: Vi har

$$\begin{aligned} 0 &= 3(\underbrace{X^2 - 4X + 4}_{(X-2)^2} - 4) + 2(\underbrace{Y^2 + 2Y + 1}_{(Y+1)^2} - 1) + 13 = \\ &= 3(X-2)^2 - 12 + 2(Y+1)^2 - 2 + 13 = \\ &= 3(X-2)^2 + 2(Y+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

(e) Translatera koordinaterna $\mathbb{X} = X - 2$, $\mathbb{Y} = Y + 1$ så får vi

$$3\mathbb{X}^2 + 2\mathbb{Y}^2 = 1$$

som uppenbarligen definierar en ellips. (Notera att dessa slutkoordinater $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ inte är samma som de vi startade, varför de är markerade med annan stil. Jag har bara valt att använda dessa bokstäver för att vi är vana att se dessa ekvationer uttryckta i $\mathbb{X}$ och $\mathbb{Y}$.) Vi har att de nya $\mathbb{X}$ och $\mathbb{Y}$ uppfyller.

$$X = \mathbb{X} + 2, \qquad Y = \mathbb{Y} - 1$$

De gamla x och y uppfyller

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \mathbb{X} + 1 \\ \mathbb{Y} - 1 \end{bmatrix} = P \left(\begin{bmatrix} \mathbb{X} \\ \mathbb{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

där de gamla koordinaterna står till vänster och de nya till höger. De gamla och de nya skiljer sig alltså åt med en rotation (given av P) och en translation.