HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik

Sören Hector 070 4616086
Mikael Forsberg 0734 412331

Matematik med datalogi, mfl.

LINJÄR ALGEBRA
ma014a
2013 05 11

Skrivtid: 10:00-15:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Beräkna alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x+y+3z &= 1 \\ x-2y-z &= -2 \\ x+y+2z &= 1 \end{aligned}$$

2. Lös binomekvationen
$$z^4+4=0$$
Rita lösningarna i det komplexa planet och ange lösningarna både på polär och rektangulär form.

3. En linjär avbildning $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ skapas genom att först spegla i linjen $y=x$ och sedan rotera moturs med $\pi/2$. Beräkna matriserna för speglingen och rotationen och använd dessa för att beräkna matrisen för avbildningen T. Rita!

4. Beräkna baser för radrum, kolonnrum och nollrum för matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Använd radreduktion (Gauss-Jordanelimnation) för att visa att radrummet W som följande tre vektorer spänner upp är ett tredimensionellt delrum av $\mathbb{R}$. Använd den reducerade matrisen som utgångspunkt för att beräkna en ON-bas för W.

$$(1,2,2,1,1),\quad (1,3,3,1,1),\quad (1,2,2,3,2)$$

6. Beräkna den linje som, i minsta kvadratmening, bäst anpassar sig till punkterna

$$(-1,-2),\ (0,-1),\ (1,0),\ (2,2),\ (3,3)$$

7. Bestäm de värden på t som gör att ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & t & -1 \\ 1 & 2 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) har unik lösning

(b) har oändligt många lösningar

(c) saknar lösning.

8. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Är matrisen diagonaliserbar?

Svar till tentamen i Linjär algebra, 2013 05 11.

1.
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Lösningarna blir på rektangulär form $\pm 1 \pm i$.
På polär form har vi $\sqrt{2}e^{i\pi/4+2\pi k}$, $k = 0, 1, 2, 3$

3. Matrisen för den sammansatta avbildningen blir
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. se lösningen

5.

6. Ekvationen för linjen blir $13x - 10y = 9$ eller $y = 1.3x - 0.9$

7. (a) $t \neq 1$, $t \neq 7$

(b) $t = 1$

(c) $t = 7$

8.)
Egenvärden:: $0, 1, 4$
Egenvektorer:: $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ och $(5, 4, 3)$.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, 2013 05 11.

1. Vi börjar med att skriva ekvationssystemet på matrisform:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

som vi sedan radreducerar och får

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Från denna matris ser vi att $z = t$ är en fri variabel. Vi får då att från rad 2 att

$$y = -z + 1 = -t + 1$$

Från rad 1 får vi sedan att

$$x = -z = -t$$

så att lösningen på parameterform blir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Vi börjar med att skriva binomekvationen på normalform:

$$z^4 = -4$$

som vi sedan skriver på polär form:

$$r^4 e^{i4\phi} = 4e^{i(\pi+2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Detta ger oss en ekvation för beloppet

$$r^4 = 4 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{2}$$

och en ekvation för argumentet/vinkeln

$$4\phi = \pi + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \phi = \pi/4 + k \cdot \pi/2$$

Eftersom vår binomekvation är av ordning 4 så vet vi (från algebrans fundamentalsats) att vi ska få fyra olika lösningar. Detta åstadkommer vi genom att välja fyra stycken på varandra värden av k, t.ex. $k = 0, 1, 2, 3$. Dessa värden ger oss lösningarna

$$z_k = \sqrt{2} e^{\pi/4 + k \cdot \pi/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Utnyttjar vi att $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ så får vi att den rektangulära formen för våra fyra lösningar blir

$$z_0 = 1 + i, \quad z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = 1 - i$$

3. Matrisen för speglingen i $y = x$ blir

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ty $(1, 0)$ avbildas till $(0, 1)$ och $(0, 1)$ avbildas till $(1, 0)$ av denna spegling. Dessa resulterande vektorer är ovanstående matris' kolonnvektorer.

Matrisen för rotationen får vi genom att se vad som händer med standardbasen. Vi får

$$\begin{aligned} (1, 0) &\mapsto (0, 1) \\ (0, 1) &\mapsto (-1, 0) \end{aligned}$$

De resulterande vektorerna, uppställda som kolonner bildar vår rotationsmatris:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisen M för avbildningen som först speglar och sedan roterar ges av matrisprodukten (här är ordningen viktig och den som utförs först ska stå längst till höger:

$$M = R \cdot S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Geometriskt så är matrisen M spegling i y-axeln.

4. Vi börjar med att radreducera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ur den reducerade matrisen så ser vi att pivotelementen står i kolonn 1, 2 och 3 vilket ger att dessa kolonner i den första matrisen är en bas för kolonnrummet. Dvs.

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

bildar en bas för kolonnrummet.

För radrummet så gäller att de nollställda raderna i den reducerade matrisen är en bas, dvs

$$\{(1, 0, 0, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0, 0)\}$$

är en bas för radrummet.

För nollrummet så behöver vi lösa $Ax = 0$. Den radreducerade matrisen hjälper oss. Från denna ser vi att de tre sista kolonnerna saknar pivotelement vilket innebär att variablerna $x_4 = s, x_5 = t$ och $x_6 = u$ som motsvarar dessa kolonnerna är fria. Vi uttrycker de övriga variablerna mha dessa fria och får då

$$\begin{aligned} x_1 &= s - t && \text{från rad 1} \\ x_2 &= -s + u && \text{från rad 2} \\ x_3 &= -s && \text{från rad 3} \end{aligned}$$

vilket ger oss lösningarna på parameterform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

De tre vektorerna i höger led är en bas för nollrummet.

5. Vi ställer alltså upp vektorerna som rader i en matris och radreducerar

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Eftersom den reducerade matrisen har tre rader och tre pivotelement så får vi att radrummet är tredimensionellt. De tre raderna i den reducerade matrisen är nollskillda och bildar en bas för radrummet. Denna bas startar vi (enligt hinten i uppgiften) för att beräkna en ON-bas. Vi noterar att rad 1 är ortogonal mot rad 2 och att rad 2 och rad 3 också är ortogonala. Men rad 3 är inte ortogonal mot rad 3.

Låt alltså b_1 och b_2 beteckna rad 1 och 2 och dessa är alltså redan ortogonala. Vi behöver nu enligt Gram-Schmidts metod projicera rad 3 (betecknad med r_3) på det delrum W som de två första spänner upp. Eftersom b_1 och b_2 är en ortogonal bas för W så får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{proj}_W r_3 &= \mathbf{proj}_{b_1} r_3 + \mathbf{proj}_{b_2} r_3 = \frac{r_3 \bullet b_1}{||b_1||^2} b_1 + \frac{\overbrace{r_3 \bullet b_2}^{=0}}{||b_2||^2} b_2 = \\ &= (1/5, 0, 0, 0, 1/10) \end{aligned}$$

När vi subtraherar denna projektion från r_3 så får vi en tredje ortogonal vektor:

$$b_3 = r_3 - \mathbf{proj}_W r_3 = (0,0,0,1,1/2) - (1/5,0,0,0,1/10) = (-1/5,0,0,1,2/5)$$

(en kontroll här visar att den verkligen är ortogonal mot båda de övriga)

b_1, b_2 och b_3 är nu en ortogonal bas för W. En ON-bas får vi nu genom att normera vektorerna Den ortonormala basen blir

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,0,0,1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0,0), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1,0,0,5,2)$$

6. Vi ska anpassa en linje $kx + m = y$ till de angivna punkterna. Om vi sätter in varje punkt i linjens ekvation så får vi ett ekvationssystem i de obekanta parametrarna k och m. Detta ekvationssystem blir

$$MX = Y, \tag{1}$$

där

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vi multiplicerar båda led av (1) med M's transponat vilket ger oss ekvationen

$$\begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

På matrisform får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 15 & 5 & 15 \\ 5 & 5 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{13}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} \end{array}\right]$$

vilket alltså betyder att $k = \frac{13}{10}$ och $m = -\frac{9}{10}$ som ger att den bäst anpassade linjen blir

$$y = \frac{13}{10}x - \frac{9}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 13x - 10y = 9$$

7. De värden på t som gör att systemet antingen saknar lösning eller har många lösningar är de värden som gör att determinanten blir noll. Vi börjar därför med att söka lösningar till

$$0 = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & t & -1 \\ 1 & 2 & t \end{bmatrix} = t^2 - 8t + 7$$

Denna ekvation har lösningarna $t = 1$ och $t = 7$ För alla andra värden på t så har vårt system en unik lösning. Vi behöver nu lösa systemet för $t = 1$ och $t = 7$ och undersöka de lösningar vi får.

$\boxed{t = 1::}$

Systemet blir då

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Detta system är uppenbarligen konsistens med z som fri variabel villet betyder att systemet har oändligt många lösningar för $t = 1$

$\boxed{t = 7::}$

I detta fall får vi systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Här avslöjar den sista raden att $0 = 0 \cdot z = 1$ vilket är en inkonsistens som innebär att detta system saknar lösningar så $t = 7$.

8. Vi kallar matrisen i uppgiften för M. Egenvärden bestäms ur den karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 5\lambda - 4)$$

som ger oss att antingen är $\lambda = 0$ eller så är $-\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0$. Det senare inträffar om antingen $\lambda = 1$ eller om $\lambda = 4$. Detta var alltså våra egenvärden. Eftersom vi har tre olika egenvärden så är vår matris diagonaliserbar.

Nu beräknar vi egenvektorerna

$\boxed{\lambda = 0}$

Vi får systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som har lösningarna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

vilket ger oss egenvektorn $(-1, 0, 1)$

$\boxed{\lambda = 1}$

Här får vi systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

vilket ger lösningarna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

där en egenvektor är $(-1, 1, 0)$.

$\boxed{\lambda = 4}$

I detta fall får vi systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som innebär att lösningarna kan skrivas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} t$$

och detta ger oss egenvektorn $(5, 4, 3)$