HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik

Sören Hector 070 4616086
Mikael Forsberg 0734 412331

Matematik med datalogi, mfl.
LINJÄR ALGEBRA
ma014a
2013 08 20

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Beräkna alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 1 \\ 3u + 2v + w &= 2 \\ 2u - v + 3w &= -1 \end{aligned}$$

2. Lös binomekvationen

$$z^3 + 8 = 0$$

Rita lösningarna i det komplexa planet och ange lösningarna både på polär och rektangulär form.

3. Matrisen för en spegling i en godtycklig linje genom origo kan beräknas genom att först rotera linjen så att den sammanfaller med x-axeln, sedan spegla i x-axeln och slutligen rotera allt tillbaka, se figur 1. Visa att detta stämmer i det fall vi vill spegla i linjen $y = x$.

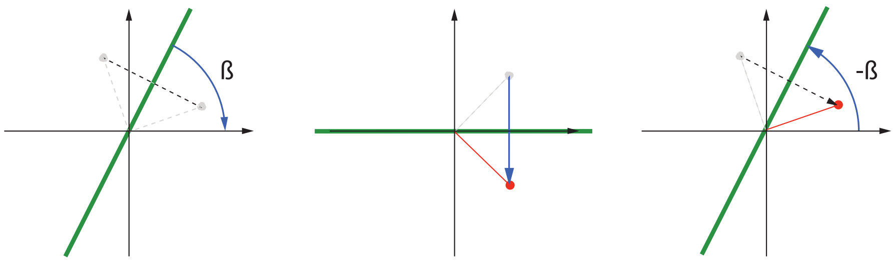

Figure 1: *Dekonstruktion av Spegling i godtycklig linje genom origo: först roterar vi vinkeln β medurs, sedan speglar vi i x-axeln och slutligen roterar vi moturs med vinkeln β*

Dvs, skriv matrisen för speglingen i $y = x$, S i som en produkt av matriserna för rotation R_1 medurs av linjen till x-axeln, S_x spegling i x-axeln samt rotation moturs tillbaka R_2. Alla ingående rotations och speglingsmatriser skall anges samt den produkt som ger oss speglingsmatrisen för spegling i $y = x$.

4. Beräkna baser för radrum, kolonnrum och nollrum för matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Beräkna projektionen av vektorn $u = (1,2,2,3,2)$ ned till det delrum W som spänns av vektorerna

$$(1,2,2,1,1), \quad (1,3,3,1,2)$$

6. Beräkna den linje som, i minsta kvadratmening, bäst anpassar sig till punkterna

$$(-1,1),\ (0,2),\ (1,0),\ (2,2),\ (3,2)$$

7. Bestäm först de värden på t som gör att matrisen $M(t)$ saknar invers.

$$M(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & t & -1 \\ 1 & 2 & t \end{bmatrix}$$

Beräkna sedan inversen för det minsta strikt positiva heltalsvärde på t som gör att matrisen är inverterbar.

8. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Är matrisen diagonaliserbar? Varför?

Svar till tentamen i Linjär algebra, 2013 08 20.

1.
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Lösningarna blir på rektangulär form $\{-2, 1 \pm \sqrt{3}i\}$.
På polär form har vi $2e^{i(\pi/3+2\pi k/3)}$, $k = -1, 0, 1$

3.
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har att
$$S = R_2 S_x R_1$$

4. se lösningen

5. Projektionen blir $\frac{1}{2}(3, 5, 5, 3, 2)$

6. Ekvationen för linjen blir $x - 5y = -6$ eller $y = 0.2x + 1.2$

7. Matrisen saknar invers för $r = 1$ och $t = 7$. Det minsta strikt positiva heltals värdet som gör att matrisen är inverterbar är $t = 2$ för detta värde så har vi inversen:

$$M(2)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -6 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

8.)
Egenvärden:: 0 (dubbelt) , 4
Egenvektorer:: till egenvärdet 0 :: $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ och för 4 har vi $(1, 1, 2)$. Matrisen är diagonaliserbar eftersom den geometriska multiplicteten (dimensionen för egenrummet) är lika med den algebraiska multiplicteten för varje egenvärde.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, 2013 08 20.

1. Vi börjar med att skriva ekvationssystemet på matrisform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

som vi Gausseliminerar och får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Går vi vidare och radreducerar får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Från denna matris ser vi att $w = t$ är en fri variabel. Vi får då att från rad 2 att

$$v = w + 1 = t + 1$$

Från rad 1 får vi sedan att

$$u = -w = -t$$

så att lösningen på parameterform blir

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Vi börjar med att skriva binomekvationen på normalform:

$$z^3 = -8$$

som vi sedan skriver på polär form:

$$r^3 e^{i3\phi} = 8e^{i(\pi+2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Detta ger oss en ekvation för beloppet

$$r^3 = 8 \quad \rightarrow \quad r = 2$$

och en ekvation för argumentet/vinkeln

$$3\phi = \pi + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \phi = \pi/3 + 2k \cdot \pi/3$$

Eftersom vår binomekvation är av ordning 4 så vet vi (från algebrans fundamentalsats) att vi ska få fyra olika lösningar. Detta åstadkommer vi genom att välja fyra stycken på varandra värden av k, t.ex. $k = -1, 0, 1$. Dessa värden ger oss lösningarna

$$z_k = 2e^{\pi/3+2k\cdot\pi/3}, \quad k = -1, 0, 1.$$

Utnyttjar vi att $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ så får vi att den rektangulära formen för våra fyra lösningar blir

$$z_{-1} = 1 - \sqrt{3}i, \quad z_0 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_1 = -2,$$

3. Matrisen för speglingen i $y = x$ blir

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ty $(1, 0)$ avbildas till $(0, 1)$ och $(0, 1)$ avbildas till $(1, 0)$ av denna spegling. Dessa resulterande vektorer är ovanstående matris' kolonnvektorer. Linjen $y = x$ bildar vinkeln $\phi = \pi/4$ $(45°)$ med x-axeln. Den första rotationen sker medurs , vinkeln blir alltså $-\pi/4$ och vi har därför

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos -\pi/4 & -\sin -\pi/4 \\ \sin -\pi/4 & \cos -\pi/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

På samma sätt har vi att

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Speglingen i x-axeln blir

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

När vi sätter samman operationerna så är det viktigt att ordningen blir den rätta (eftersom matrismultiplikationen inte är kommutativ). Den första operationen ska stå längst till höger och den sista ska stå först. I vårt fall har vi att rotation medurs, spegling i x samt rotation moturs ger oss

$$R_2 S_x S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = S$$

4. Vi börjar med att radreducera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ur den reducerade matrisen så ser vi att pivotelementen står i kolonn 1, 2 och 3 vilket ger att dessa kolonner i den första matrisen är en bas för kolonnrummet. Dvs.

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

bildar en bas för kolonnrummet.

För radrummet så gäller att de nollställda raderna i den reducerade matrisen är en bas, dvs

$$\{(1, 0, 0, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0, 0)\}$$

är en bas för radrummet.

För nollrummet så behöver vi lösa $Ax = 0$. Den radreducerade matrisen hjälper oss. Från denna ser vi att de tre sista kolonnerna saknar pivotelement vilket innebär att variablerna

$x_4 = s, x_5 = t$ och $x_6 = u$ som motsvarar dessa kolonnerna är fria. Vi uttrycker de övriga variablerna mha dessa fria och får då

$$\begin{aligned} x_1 &= s - t && \text{från rad 1} \\ x_2 &= -s + u && \text{från rad 2} \\ x_3 &= -s && \text{från rad 3} \end{aligned}$$

vilket ger oss lösningarna på parameterform

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

De tre vektorerna i höger led är en bas för nollrummet.

5. Ideń är att beräkna en ortogonal bas för W med Gram-Schmidts metod. Mha denna kan vi sedan beräkna projektionen. Vi börjar med att ställa upp vektorerna som rader i en matris och radreducerar

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tack vare detta har vi nu att de två radvektorer bildar bas för W och är, tack vare alla nollor, en enklare bas att utgå från när vi nu går vidare med Gram-Schmidt.

Låt alltså b_1 och v_2 beteckna rad 1 och 2.

Första (och enda) steget är att göra om v_2 så att den nya vektorn, kallad w_2 är ortogonal mot b_1:

$$w_2 = v_2 - \mathbf{proj}_{b_1} v_2 = v_2 - \frac{v_2 \bullet b_1}{||v_1||^2} v_1 = (0,1,1,0,1) - \frac{-1}{3}(1,0,0,1,-1) = \frac{1}{3}(1,3,3,1,2)$$

Vi låter nu $b_2 = 3w_2$ så att vi slipper hantera tredjedelarna. b_2 är, som vi lätt ser, ortogonal mot b_1. Tack vare att b_1 och b_2 är en ortogonal bas för W så kan vi nu beräkna den sökta projektionen genom

$$\mathbf{proj}_W u = \mathbf{proj}_{b_1} u + \mathbf{proj}_{b_2} u = \underbrace{\frac{u \bullet b_1}{||b_1||^2}}_{=\frac{4}{6}} b_1 + \underbrace{\frac{u \bullet b_2}{||b_2||^2}}_{=\frac{5}{6}} b_2 =$$

$$= \frac{1}{6}[4(1,0,0,1,-1) + 5(1,3,3,1,2)] = \frac{1}{6}(9,15,15,9,6) = \frac{1}{2}(3,5,5,3,2)$$

6. Vi ska anpassa en linje $kx + m = y$ till de angivna punkterna. Om vi sätter in varje punkt i linjens ekvation så får vi ett ekvationssystem i de obekanta parametrarna k och m. Detta ekvationssystem blir

$$MX = Y, \tag{1}$$

där

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi multiplicerar båda led av (1) med M's transponat vilket ger oss ekvationen

$$\begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

På matrisform får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 15 & 5 & 9 \\ 5 & 5 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} \end{array}\right]$$

vilket alltså betyder att $k = \frac{1}{5}$ och $m = \frac{6}{5}$ som ger att den bäst anpassade linjen blir

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{6}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 1x - 5y = 6$$

7. Matrisen $M(t)$ saknar invers precis när determinanten blir noll. Vi börjar därför med att söka lösningar till

$$0 = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & t & -1 \\ 1 & 2 & t \end{bmatrix} = t^2 - 8t + 7$$

Denna ekvation har lösningarna $t = 1$ och $t = 7$ För alla andra värden på t så har vår matris invers. Det minsta strikt positiva heltalsvärdet på t som garanterar en invers blir alltså $t = 2$. För detta värde så beräknar vi inversen genom att göra den typiska uppställning $[M(2)|I]$ som radreduceras

$$[\ M(2) \mid I\ ] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right]$$

Slutligen kan vi bryta ut en femtedel från matrisen för att göra svaret något snyggare!

$$M(2)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

8. Vi kallar matrisen i uppgiften för M. Egenvärden bestäms ur den karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 4\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(4 - \lambda)$$

som ger oss att antingen är $\lambda = 0$ som är ett dubbelt egenvärde eller så är $\lambda = 4$, som är ett enkelt egenvärde. För att matrisen ska vara diagonaliserbar så krävs att egenrummen får matchande dimensioner. För att utreda detta så behöver man beräkna egenvektorerna för våra två egenvärden. Vi måste därför lös systemen

$$(M - \lambda I)x = 0$$

för våra egenvärden: $\boxed{\lambda = 0}$

Vi får systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som har lösningarna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

vilket ger oss ett tvådimensionellt egenrum spänt av egenvektorerna $(-1, 1, 0)$ och $(-1, 0, 1)$. Egenrummet är alltså tvådimensionellt vilket stämmer överens med den algebraiska multipliciteten som ju var två för egenvärdet $\lambda = 0$

$\boxed{\lambda = 4}$

I detta fall får vi systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som innebär att lösningarna kan skrivas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} t'$$

där $t = 2t'$, och detta ger oss egenvektorn $(1, 1, 2)$. Detta egenrum är alltså endimensionell och stämmer överens med multiplicteten ett för egenvärdet.

Båda egenvärdenas multipliciteter stämmer alltså överens med egenrummens dimensioner och detta är något som utmärker alla diagonaliserbara matriser. Vår matris är alltså diagonaliserbar.