HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734 - 41 23 31

För studenter på distans och campus
LINJÄR ALGEBRA
ma014a
2014 01 15

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad. Varje uppgift ger 5 poäng och minst 16 poäng av maximala 40 poäng krävs för godkänt.

1. Beräkna alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2s + 3t + 5u &= 1 \\ 5s + 3t + 2u &= 1 \\ 3s - 3u &= 1 \end{aligned}$$

2. Lös binomekvationen

$$z^4 - 2 - 2\sqrt{3}i = 0$$

3. Beräkna en ON-bas för radrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Givet en rät linje $y = kx$ så vill vi beräkna matrisen till den avbilding som geometriskt är speglingen i denna linje. Denna spegling kan tolkas som sammansättningen av att först rotera linjen så att den sammanfaller med x-axeln, sedan spegla i x-axeln och slutligen rotera tillbaka till linjens ursprungliga position.

   Beräkna matrisen S_L som utför spegling i linjen $y = \sqrt{3}\, x$, dvs spegling i den linje som har lutningskoeffecienten $k = \sqrt{3}$.

5. De tre vektorerna $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2)$ och $v_3 = (1, 2, 2)$ spänner upp en tredimensionell parallellepiped. Beräkna volymen av denna parallellepiped samt den sammanlagda arean av dess begränsningsyta.

UPPGIFT 6,7 OCH 8 PÅ NÄSTA SIDA →

6. Beräkna en matris P som diagonaliserar matrisen

$$M_6 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Hitta den ellips på formen $ax^2 + by^2 = 1$ som bäst anpassar sig till punkterna

$$(-3, 1), (0, 1), (4, 0), (2, -1), (-1, -1)$$

8. Bestäm värden på parametern t så att systemet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & 2 & t \end{bmatrix}}_{=A(t)} x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=b}$$

(a) får unik lösning

(b) har oändligt många lösningar

(c) saknar lösningar

Svar till tentamen i Linjär algebra, 2014 01 15.

1. Systemet är inkonsistent och saknar lösningar

2. $z = \sqrt{2}e^{i(\pi/12+n\pi/2)}$, $n = 0, 1, 2, 3$

3.
$$o_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,0,1,0), \quad o_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,0,0,1), \quad o_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,2,0,0,-1)$$

4.
$$S_L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

5. Arean blir $4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ och volymen blir 1.

6.
$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.
$$\frac{16}{305}x^2 + \frac{249}{305}y^2 = 1$$

8. (a) Unik lösning om $1 \neq t \neq 4$
   (b) Oändligt många lösningar om $t = 1$
   (c) Saknar lösningar om $t = 4$

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, 2014 01 15.

1. Ställ upp systemet på matrisform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Gaussjordaneliminering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Den sista raden betyder att $0 = 1$ vilket är en omöjlighet och gör att systemet är inkonsistent och saknar lösningar. Slutsatsen kan också motiveras genom att hänvisa till det som sägs i ”Existens and Uniqueness Theorem” i kapitel 1.2 i Lays bok.

2. Skriv om ekvationen på normalform

$$z^4 = 2 + 2\sqrt{3}i$$

Skriv sedan båda led på polär form. Vi får

$$r^4 e^{i4\theta} = 4e^{i(\pi/3+2n\pi)}$$

Beloppen för de båda sidorna måste vara lika vilket ger oss att $r = \sqrt{2}$. Sedan behöver även argumenten vara lika och detta ger att

$$4\theta = \pi/3 + 2n\pi \quad \rightarrow \quad \theta = \pi/12 + n\pi/2$$

och fyra på varandra följande värden på n, t.ex. $n = 0, 1, 2, 3$ ger oss de fyra olika lösningarna för vår ekvation:

$$z = \sqrt{2}e^{i(\pi/12+n\pi/2)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

Om vi vill ha principalvinklar så väljer vi istället $n = -2, -1, 0, 1$.

3. Börja med att Gauss-Jordan eliminera matrisen vilket ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De tre första raderna är en bas för radrummet. Notera att vi har tur att de två första raderna är ortogonala men den tredje radvektorn är inte ortogonal mot de övriga och då behöver vi använda Gram-Schmidts metod för att åstadkomma ortogonalitet. Efter det så behöver vi också normera vektorerna.

Vår första vektor är $v_1 = (1, 0, 0, 0, 1, 0)$, den andra är $v_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 1)$ och är ortogonal mot den första. Ingen av dem har ännu längden ett. Den tredje vektorn får vi från den tredje radvektorn $r_3 = (0, 0, 1, 0, 0, -1)$ mha Gram-Schmidt dvs genom ortogonal projektion:

$$v_3 = r_3 - \mathbf{proj}_{v_1} r_3 - \mathbf{proj}_{v_2} r_3 = (0, 0, 1, 0, 0, -1) - \frac{\overbrace{r_3 \bullet v_1}^{=0}}{||v_1||^2} v_1 - \frac{r_3 \bullet v_2}{||v_2||^2} v_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(0, 1, 2, 0, 0, -1)$$

En snabb kontroll verifierar att $v_3 \bullet v_1 = v_3 \bullet v_2 = 0$ så att v_3 verkligen är ortogonal mot de båda övriga. Vi normerar nu de tre vektorerna och får då ON-basvektorerna

$$o_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,0,1,0), \quad o_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,0,0,1), \quad o_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,2,0,0,-1)$$

Det finns många andra möjliga ON-baser men dessa innebär troligen betydligt mer och besvärliga räkningar.

4. Vår räta linje bildar vinkeln $\pi/3$ eller $60°$ med x-axeln. Detta gör att den första rotationen sker med $60°$ medurs, eftersom moturs rotationsriktning definieras som positiv riktning så innebär detta att vår rotation är en rotation med -60°. Denna rotation realiseras mha matrisen

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/3) & -\sin(-\pi/3) \\ \sin(-\pi/3) & \cos(-\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Med den andra rotationen så ska vi rotera tillbaka till ursprungspositionen vilket alltså är en rotation med vinkeln $60°$ moturs, vilket ger följande matris.

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Speglingen i x axeln ges av matrisen

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Speglingen S_L i linjen ges enligt uppgiftsformuleringen av att man först roterar med R_1 varefter vi utför speglingen S och slutligen roterar tillbaka med R_2 Sammansättningen blir en matrisprodukt där den första operationens matris ska stå längst till höger och de övriga två till vänster om denna:

$$S_L = R_2 \cdot S \cdot R_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

5. Volymen ges av

$$\left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right| = |-1| = 1$$

Begränsningsytan ges av areorna som spänns av varje par av vektorerna och dessa areor ges av kryssprodukternas längd.

$$A_1 = ||v_1 \times v_2|| = ||(1,-1,0)|| = \sqrt{2}$$
$$A_2 = ||v_1 \times v_3|| = ||(0,-1,1)|| = \sqrt{2}$$
$$A_3 = ||v_2 \times v_3|| = ||(-2,0,1)|| = \sqrt{5}$$

Kom ihåg att volymen begränsas av *par* av motstående sidor och då får vi den totala arean blir

$$A = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$

6. Vår matris är symmetrisk och den är därför automatiskt diagonaliserbar. En diagonaliserande matris består av matrisens egenvektorer så vi börjar med att beräkna dessa. Detta innebär att vi först måste beräkna egenvärdena som är nollställen till matrisens karakteristiska polynom:

$$c(\lambda) = \det(M_6 - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16$$

För att få fram nollställena till $c(\lambda)$ så testar vi med några av de heltal som delar konstantfaktorn 16. Det är inte svårt att se att $\lambda = 4$ är ett nollställe. Polynomdivision ger att

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16 = -(\lambda - 4)(x^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)^2,$$

från vilket vi ser att $\lambda = 2$ är ett dubbellt nollställe och eftersom M_6 är symmetrisk så förväntar vi oss att egenrummet till $\lambda = 2$ är två dimensionellt.

Vi går vidare och beräknar egenvektorerna:

Först $\lambda = 4$:

Vi löser $(M_6 - 4I)x = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

från vilket det följer att egenrummet kan skrivas

$$E_{\lambda=4} = \{ \text{ vektorer som kan skrivas som } t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=e_1} \}$$

Egenrummet till $\lambda = 2$::

Vi löser $(M_6 - 2I)x = 0$:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

och detta ger oss att egenrummet blir

$$E_{\lambda=2} = \text{Span} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=e_3} \right\}$$

En diagonaliserande matris får man om vi ställer upp vektorerna e_1, e_2 och e_3 som kolonner i en matris. Mao

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Ellipsekvationen ger en ekvation för varje punkt:

$$\begin{aligned} 9a + b &= 1 \qquad (-3, 1) \\ b &= 1 \qquad (-1, 0) \\ 16a &= 1 \qquad (4, 0) \\ 4a + b &= 1 \qquad (2, -1) \\ a + b &= 1 \qquad (-1, -1) \end{aligned}$$

Detta system är uppenbarligen överbestämt och saknar vanliga lösningar. Vi behöver använda oss av minsta kvadrat metoden för en lösning och vi börjar med att skriva systemet på matrisformen $Ax = b$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 1 \\ 16 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=b}$$

Vi multiplicerar båda led med A^T från vänster vilket ger följande system:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 354 & 14 \\ 14 & 4 \end{bmatrix}}_{=A^TA} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 30 \\ 4 \end{bmatrix}}_{=A^Tb}$$

Lösningarna till detta system ger oss minstakvadratvärdena på ellipseccentriciteterna a och b. Vi får

$$\begin{bmatrix} 354 & 14 & 30 \\ 14 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 354 & 14 & 30 \\ 14 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{305} \\ 0 & 1 & \frac{249}{305} \end{bmatrix}$$

som alltså betyder att $a = \frac{16}{305}$ och $b = \frac{249}{305}$ Den bäst anpassade ellipsen blir alltså

$$\frac{16}{305}x^2 + \frac{249}{305}y^2 = 1$$

8. De intressanta värdena är de värden på t som gör att matrisen $A(t)$ saknar invers. För sådant värde är systemet antingen inkonsistent och saknar lösningar eller så är det konsistent med oändligt många lösningar. Matrisen saknar invers precis då determinanten blir noll. Determinanten blir

$$\det A(t) = t^2 - 5t + 4$$

Detta polynom är noll precis om $t = 1$ och om $t = 4$. Om t inte är något av dessa värden så är systemet konsistent med unik lösning vilket blir svaret på uppgift a.

För att ta reda på om systemet är konsistent eller inte för $t = 1$ och $t = 4$ så måste vi lösa systemet för dessa värden:

$\boxed{t = 4::}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Eftersom rangen för den utvidgade matrisen är 3 medan rangen för matrisen i vänster led är 2 så förstår vi att detta system är inkonsistent och saknar lösningar.

$\boxed{t = 1::}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Denna system har en fri variabel och systemet har därför många lösningar.