HÖGSKOLAN
I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg 0734-412331
Sören Hector 070-4616086
Rolf Källström 070-6229309

Ingenjörer, Lantmätare och Distansstuderande, mfl.

LINJÄR ALGEBRA
ma014a
2014 03 25

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng

1. Lös ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   Ge lösningen, om möjligt, på parameterform.

2. Beräkna alla lösningar till binomekvationen

$$z^5 - 16\left(1 - i\sqrt{3}\right) = 0$$

3. Ett gruvbolag har m.h.a bland annat en Mise a la Masse analys lyckats lokalisera en malmkropp (se figur 1) och kan nu säga att den är innehållen i en viss parallellepiped. I en viss referensram så har dessa hörn bestämts till

$$p_0 = (1,4,0), \quad p_1 = (3,5,2), \quad p_2 = (2,3,2), \quad p_3 = (1,7,2)$$

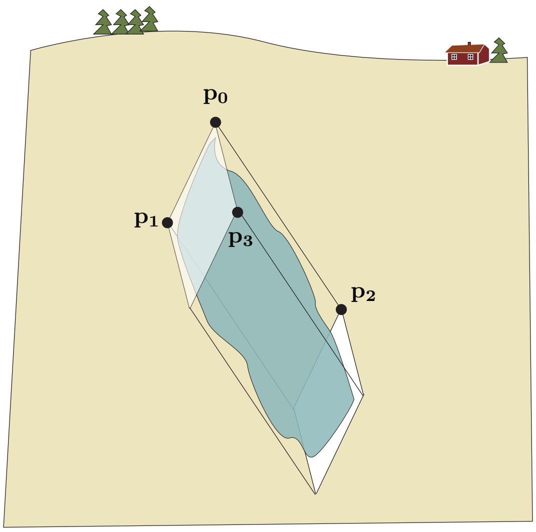

Figure 1: Malmkroppen till uppgift 5 och den innehållande parallellepipeden

   Ge en uppskattning av malmkroppens volym genom att beräkna volymen av parallellepipeden.

4. Beräkna en bas till det rum som vektorerna

$$v_1 = \{1, 1, 2, 1, 1), \quad v_2 = (2, 1, 1, 1, 2), \quad v_3 = (1, 1, 1, 1, 2), \quad v_4 = (3, 1, 0, 1, 3), \quad v_5 = (3, 2, 4, 2, 2)$$

spänner upp. Använd sedan Gram-Schmidts metod för att göra om denna till en ON-bas.

5. Beräkna den ellips på formen

$$ax^2 + by^2 = 1$$

som bäst anpassar sig till punkterna $(1, 2)$,$(0, 3)$,$(-1, 1)$,$(0, -1)$,$(1, 1)$.

6. Vi har baserna $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$, givna som kolonnerna till matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Beräkna matrisen $\underset{B \leftarrow A}{P}$ som överför vektorer uttryckta i basen $\mathcal{A}$ till vektorer uttryckta i basen $\mathcal{B}$. Vad blir vektorn $[v]_{\mathcal{A}} = [1, 2, 1]^T_{\mathcal{A}}$ uttryckt i basen $\mathcal{B}$?

7. Förklara varför matrisen A_7 är diagonaliserbar. Beräkna diagonalmatrisen såväl som en matris som diagonaliserar matrisen.

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

8. Låt

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Hitta de värden på parametern t som gör att systemet $A(t)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har

(a) Unik lösning.

(b) Många lösningar.

(c) Saknar lösningar.

Svar till tentamen i Linjär Algebra, 2014 03 25.

1.
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.
$$z = 2e^{i(-\pi/15+(2\pi/5)k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

3. Malmkroppens volym är 12 volymsenheter.

4.
$$\begin{aligned} o_1 &= (1, 0, 0, 0, 0) \\ o_2 &= \frac{1}{\sqrt{11}}(0, 1, 0, 1, 3) \\ o_3 &= \frac{1}{\sqrt{143}}(0, 3, 11, 3, -2) \end{aligned}$$

5. $\frac{17}{22}x^2 + \frac{5}{44}y^2 = 1$

6.
$$\underset{B\leftarrow A}{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7. Digaonaliserande och diagonala matriser är

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8. (a) Om $t \neq 1$ och $t \neq 2$ så får vi ett system som har unik lösning.

(b) Om $t = 2$ så har vi ett konsistent system med många lösningar.

(c) Om $t = 1$ så blir systemet inkonsistent och saknar lösningar.

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra, 2014 03 25.

1. Ställ upp systemets utvidgade matris och radreducera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Från den eliminerade matrisen har vi har pivot/ledande element i kolonn ett och två. Detta betyder att variablerna x och y är pivot/ledande variabler. Den sista kolonnen saknar ledande element och ger att z är en fri variabel. Eftersom vi har femtedelar i matrisen så kan man inse att man kan få bort bråket genom att sätta $z = 5s$, vilket leder oss till parameterlösningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gör man inte detta trick utan använder det enklare $z = t$ så får vi lösningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skillnaden mellan de två lösningarna är bara att skalan för t fem gånger större. Ett t-steg svarar mot fem s-steg.

2. Vi ska alltså hitta lösninger till

$$z^5 = 16\left(1 - i\sqrt{3}\right)$$

och vi börjar med att skriva båda led på polär form med $z = re^{i\alpha}$:

$$r^5 e^{5i\alpha} = 32e^{i(-\pi/3+2\pi k)}$$

För beloppet har vi

$$r^5 = 32 \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

För argumentet har vi

$$5\alpha = -\pi/3 + 2\pi k, \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\pi/15 + (2\pi/5)k$$

Fem på varandra följande värden på k ger de 5 lösningar som vi söker. Tag t.ex. $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$z = 2e^{i(-\pi/15+(2\pi/5)k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

3. Vi beräknar först parallellepipedens sidvektorer:

$$\begin{aligned} v_1 &= p_1 - p_0 = (3, 5, 2) - (1, 4, 0) = (2, 1, 2) \\ v_2 &= p_2 - p_0 = (2, 3, 2) - (1, 4, 0) = (1, -1, 2) \\ v_3 &= p_3 - p_0 = (1, 7, 2) - (1, 4, 0) = (0, 3, 2) \end{aligned}$$

Volymen är nu lika med beloppet av determinanten till matrisen som har dessa tre vektorer som rader:

$$V = |\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}| = |-12| = 12$$

4. Ställ upp vektorerna som raderna i en matris och radreducera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De tre nollskilda raderna i den eliminerade matrisen är en bas för radrummet. Vi använder nu denna bas som utgångspunkt för Gram-Schmidts metod. Notera att de första två raderna redan är ortogonala så vi kan sätta

$$b_1 = (1,0,0,0,0)$$
$$b_2 = (0,1,0,1,3)$$

Om vi kallar den tredje radvektorn för r_3 så får vi den tredje vektorn, m.h.a. Gram-Schmidts metod att bli

$$\begin{aligned} b_3 &= r_3 - \mathbf{proj}_{b_1} r_3 - \mathbf{proj}_{b_2} r_3 = \\ &= r_3 - \frac{\overbrace{r_3 \bullet b_1}^{=0}}{||b_1||^2} b_1 - \frac{\overbrace{r_3 \bullet b_2}^{=-3}}{\underbrace{||b_2||^2}_{=11}} b_2 = \\ &= (0,0,1,0,-1) + \frac{3}{11}(0,1,0,1,3) = \frac{1}{11}(0,3,11,3,-2) \end{aligned}$$

En snabb kontroll visar att b_3 verkligen är ortogonal mot b_1 och b_2.

För att få en ON-bas så behöver vi nu bara normera vektorerna:

$$\begin{aligned} o_1 &= \frac{b_1}{||b_1||} = (1,0,0,0,0) \\ o_2 &= \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{1}{\sqrt{11}}(0,1,0,1,3) \\ o_3 &= \frac{b_3'}{||b_3'||} = \frac{1}{\sqrt{143}}(0,3,11,3,-2) \end{aligned}$$

En not om beräkningen av o_3 Eftersom b_3 innehåller en faktorn1/11 så kommer denna faktor finnas med både i täljare och nämnare vid normeringen och kommer då att förkortas. Detta gör att vid normeringen så normaliserar jag istället $b_3' = 11b_3$, vilket är enklare.

5. Vi sätter in alla punkterna i ekvationen och får då ekvationssystemet

$$\begin{aligned} a + 4b &= 1 \\ 9b &= 1 \\ a + b &= 1 \\ b &= 1 \\ a + b &= 1, \end{aligned}$$

som på matrisform blir

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=M_4} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi får fram Normalekvationen genom att multiplicera med transponatet till M_4 från vänster i båda led:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Vi skriver detta på utvidgat matrisform och radreducerar:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 100 & 16 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{22} \\ 0 & 1 & \frac{5}{44} \end{bmatrix}$$

Från detta får vi alltså att $a = \frac{17}{22}$ och $b = \frac{5}{44}$ och vår ekvation för den ellips som bäst anpassar sig till våra punkter blir

$$\frac{17}{22}x^2 + \frac{5}{44}y^2 = 1$$

6. Basbytesmatrisen $\underset{B \leftarrow A}{P}$ fås som produkten $B^{-1}A$. Denna produkt beräknas genom

$$(B|A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

vilket alltså ger oss

$$\underset{B \leftarrow A}{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Koordinaterna för v m.a.p. basen $\mathcal{B}$ blir

$$[v]_{\mathcal{B}} = \underset{B \leftarrow A}{P}[v]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7. Egenvärden beräknas från den karakteristiska ekvationen $c(x) = \det(A - xI) = 0$:

$$c(x) = \det(A - xI) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$$

Vi gissar på de heltal som delar konstanttermen 3: $\pm 1, \pm 3$ och får då att $+1$ och $+3$ är nollställen. För att få fram det tredje nollstället så utnyttjar vi att $c(x)$ är delbart med polynomet

$$(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3.$$

Polynomdivision ger oss

$$\begin{array}{r} -x + 1, \\ x^2 - 4x + 3 \overline{\smash{\big)} -x^3 + 5x^2 - 7x + 3} \\ \underline{x^3 - 4x^2 + 3x } \\ x^2 - 4x + 3 \\ \underline{-x^2 + 4x - 3} \\ 0 \end{array}$$

vilket alltså ger oss egenvärdet $x = 1$. Vi har nu egenvärdena $x = 1$ som är dubbelt (dvs algebraisk multiplicitet 2) och det enkla egenvärdet $x = 3$.

$\boxed{x = 1 ::}$ Vi beräknar egenrummet, dvs Löser $(A - I)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss två fria variabler (från den första och den sista kolonnen) som vi uttrycker med parametrarna s och t. Vi får

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Vi ser att de två vektorerna i detta uttryck är en bas för detta egenrum. Egenrummet är alltså tvådimensionellt och betyder alltså att den geometriska multipliciteten för $x = 1$ är 2.

$\boxed{x = 3 \text{ ::}}$ Vi beräknar egenrummet, dvs Löser $(A - 3I)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Här har vi en fri variabel (hör ihop med tredje kolonnen) och med parametern t så får vi att egenrummet kan uttryckas som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

I tabellen så sammanställer vi multipliciteterna för våra egenvärden. Eftersom algebraisk och geometrisk multiplicitet stämmer överens för alla våra egenvärden så är vår matris diagonaliserbar. En diagonaliserande matris får vi om vi ställer upp alla egenrumsbasvektorer som kolonner i en matris:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notera att de två första kolonnvektorerna är egenvektorer till egenvärdet $x = 1$ och den sista är egenvektor för egenvärdet $x = 3$. Detta ger slutligen den diagonala matrisen

$$D_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Egenvärden	Algebraisk mult	Geometrisk mult
1	2	2
3	1	1

Table 1: *Egenvärden till matrisen A_7 och dess multipliciteter. Vi ser att för båda egenvärdena så är algebraisk multiplicietet lika med den geometriska multipliciteten. Detta betyder att matrisen är diagonaliserbar!*

8. De värden på parametern som är kritiska för vårt system är de värden som gör att matrisens determinant blir noll. Vi har att

$$\det A(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix} = t^2 - 3t + 2$$

Andra gradspolynomets nollställen blir $t = 1$ och $t = 2$. För dessa värden kan systemet antingen vara inkonsistent eller konsistens med många lösningar. För övriga värden på t så är matrisen inverterar och systemet har då unik lösning.

Vi studerar nu de kritiska fallen:

$\boxed{t = 2 \; ::}$ Vårt system blir på matrisform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta system är uppenbarligen konsistens och har en fri variabel och vi får därför många lösningar.

$\boxed{t = 1 \; ::}$ I detta fall får vi den utvidgade matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

och detta system är inkonsistent och saknar lösningar.