HÖGSKOLAN I GÄVLE
Akademin för teknik och miljö
Rolf Källström
telefonkontakt med examinator via tentamensvakten

Matematiktentamen
Ingenjörer, lärare, m fl

LINJÄR ALGEBRA
ma014a.
2014–05–16

Skrivtid: 09.00–14.00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara noggrant motiverade och prydligt nedskrivna (använd svenska språket!); ofullständig motivering kan ge poängavdrag. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Bestäm matrisen X så att
$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} - X \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} = E,$$
där E är identitetsmatrisen.

2. Bestäm belopp och argument till det komplexa talet
$$\frac{(2+2i)(1-i)}{(1+i)^5}.$$

3. En vägg är bestämd genom att mäta upp koordinaterna för tre punkter $A(1,0,1)$, $B(1,1,0)$ och $C(1,-1,0)$ på väggen (som inte alla ligger längs en rät linje). Vi har ett föremål som skall placeras punkten $P(2,1,1)$. Hur långt från väggen kommer därmed föremålet att vara? Här skriver vi $A(1,0,1)$ osv för att kunna prata om punkten A med koordinater $(1,0,1)$ i det vanliga euiklidiska rummet $\mathbf{R}^3$ (Tips: projicera lämplig vektor på en normalvektor till väggen.)

4. Givet är vektorerna $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ i standardbasen $S = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ för $\mathbf{R}^2$. I en annan bas B har vektorerna koordinaterna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm basen $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ där $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ skall uttryckas i koordinater i standardbasen.

5. Den linjära transformationen $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $(x,y) \mapsto T(x,y)$ bildas genom sammansättningen av en reflexion genom origo, en rotation vinkeln $\pi/4$ moturs, och slutligen en reflexion i x-axeln (i den ordningen). Bestäm en matris A så att $T(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

6. Bestäm en bas för nollrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -2 & -7 \\ 2 & -6 & 4 & 8 \\ 3 & -9 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

samt ange matrisens rang.

7. Vi har mätdata enligt tabellen

x	0.1	.3	0.35	0.7
y	2	1	0	3

Vi har även givet tre funktioner $f_1(x), f_2(x)$ och $f_3(x)$, vars värden är kända i de x-värden som mäts upp, enligt

x	0.1	.3	0.35	0.7
$f_1(x)$	1	0	1	-1
$f_2(x)$	0	-1	2	1
$f_3(x)$	2	-1	1	1

Välj parametrarna β_0, β_1 och β_3 så att funktionen $y = \beta_0 f_1(x) + \beta_1 f_2(x) + \beta_2 f_3(x)$ anpassas så bra som möjligt till mätdata i meningen att summan av kvadraterna på felen i y-värdena blir minimal.

8. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -12 & -7 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm en matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

(b) Beräkna A^{2014}.

(c) Kan matrisen A diagonaliseras ortogonalt?

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, 2014–05–16.

1. Vi behöver inversen

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{8}{55} \\ -\frac{1}{11} & -\frac{3}{55} \end{pmatrix}$$

Vi kan då lösa ut matrisen X genom

$$X = \left(\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} + E \right) \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{16}{55} \\ \frac{7}{11} & -\frac{18}{55} \end{pmatrix}$$

2. Belopp

$$\left| \frac{(2+2i)(1-i)}{(1+i)^5} \right| = \frac{2\,|1+i|\,|1-i|}{|1+i|^5} = \frac{2}{(\sqrt{1+1})^3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Argument

$$\arg\left(\frac{(2+2i)(1-i)}{(1+i)^5} \right) = \arg(1+i) + \arg(1-i) - 5\arg(1+i) = -\frac{5\pi}{4}$$

Vi lägger till en multipel av 2π så att argumentet blir mellan 0 och 2π, vi får då argumentet $2\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

3. Vi bildar en vektor som är vinkelrät mot väggen. Avståndet ges därefter av längden av projektionen av någon vektor från P till en punkt på väggen. Sätt $\mathbf{v}_1 = \vec{AB} = (0,1,-1)$ och $\mathbf{v}_2 = \vec(AC) = (0,-1,-1)$ och

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{e}_1 = (-2,0,0).$$

Sätt sedan $\mathbf{w} = \vec{AP} = (1,1,0)$, varvid avståndet ges av

$$|\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})| = |\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}|}{|\mathbf{u}|} = \frac{2}{2} = 1.$$

4. Kalla vektorerna $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Vi har alltså i standardbasen S koordinater $[\mathbf{v}]_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $[\mathbf{w}]_S = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, och i basen B har vi $[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $[\mathbf{w}]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Skriv $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ och $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Vi får ekvationerna $1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vi får två linjära ekvationssystem med samma koefficientmatris men olika högerled: $a + c = 3, 2a + c = 4$ samt $b + d = 2, 2b + d = 3$. I matrisform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eftersom $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ får vi så

$$[\mathbf{f}_1]_S = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{f}_2]_S = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. Vi undersöker vad T gör med standardbasvektorna $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{e}_1 \to -\mathbf{e}_1 \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 \to -\mathbf{e}_2 \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Det ger standardmatrisen

$$[T] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

6. Den reducerade trappstegsformen är

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som alltså har två nollskilda rader, varför matrisen A har rang 2. Nollrummet ges av lösningarna till $A\mathbf{x} = b$, vilket är samma som lösningarna till ekvationen $A_1\mathbf{x} = b$. Dvs, om $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ så är $x_2 = t$ och $x_4 = s$ fria variabler och

$$x_3 + \frac{5}{4}s = 0 \quad \text{och} \quad x_1 - 3t + \frac{3}{2}s = 0$$

Det ger

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3t - \frac{3}{2}s \\ t \\ -\frac{5}{4}s \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -5/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En bas för nollrummet ges av

$$\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -5/4 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

7. Designmatrisen blir

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

observationsvektorn $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Det ger $X^TX = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ och $X^T\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, varför normalekvationer $X^TX\boldsymbol{\beta} = X^T\mathbf{y}$ löses genom att ställa upp den utökade matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8/7 \\ 0 & 1 & 0 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & 10/7 \end{array}\right)$$

Det ger minstakvadratanpassningen $y = -\frac{8}{7}f_1(x) - \frac{3}{7}f_2(x) + \frac{10}{7}f_3(x)$.

8. a) Egenvärden: Karaktäristisk ekvation blir $\begin{vmatrix} \lambda - 7 & -4 \\ 12 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = 0$, dvs $(\lambda-7)(\lambda+7)+48 = 0$, som har rötterna $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Egenrum: $\lambda_1 = 1$, bestäms av $-6x_1 - 4x_2 = 0$, så med

$x_2 = t$ fri, $x_1 = -\frac{2}{3}t$, blir $E_1 = \{t(\frac{2}{3}, -1)\}$. $\lambda_2 = -1$, bestäms av $-8x_1 - 4x_2 = 0$, med $x_2 = t$ fri, $x_1 = -\frac{1}{2}t$, så $E_{-1} = \{t(-1/2, 1)\}$. ON-bas för E_1 ges av $\frac{3}{\sqrt{13}}(\frac{2}{3}, -1)$, för E_{-1}, $\frac{2}{\sqrt{5}}(-1/2, 1)$. Sätter man

$$P = \begin{pmatrix} \frac{6}{3\sqrt{13}} & -\frac{2}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

gäller $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ och $A = PDP^{-1}$.

b) $A^{2014} = (PDP^{-1})^{2014} = PD^{2014}P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$, där vi noterar att 2014 är ett jämt tal, så $(-1)^{2014} = 1$. Alltså $D^{2014} = D$. Till slut

$$A^{2014} = PDP^{-1} = I,$$

dvs vi får identitetsmatrisen! c) Eftersom matrisen A inte är symmetrisk följer av spektralsatsen att A inte kan diagonaliseras ortogonalt. Detta ses också av att matrisen P inte har ortogonala kolonnvektorer, alt att A:s egenvektorer inte är ortogonala.