HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Sören Hector 070-4616086
Mikael Forsberg 0734-412331
Rolf Källström 070-6229309

Studerande i matematik på campus och distans.

LINJÄR ALGEBRA
ma034a
20140819

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Lös ekvationssystemet för samtliga värden på a:

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 20 \\ x + 2y + 7z &= 14 \\ 2x - 3y + az &= a. \end{aligned}$$

2. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^2(1+i)^4}{(1+i\sqrt{3})^4}.$$

3. Man har gjort följande iakttagelser vid en mätning:

x	y
-1	8
0	10
1	13
2	14
3	15

Table 1: Iaktagelserna vid den aktuella mätningen.

Teorin säger att detta bör vara en linjär funktion,$y = kx + m$. Gör en minstakvadratanpassning så att funktionen anpassar sig så bra som möjligt till mätningen.

4. Beräkna baser för rad, kolonn och nollrum till matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

5. (a) Beräkna en ON-bas för radrummet i föregående uppgift.
   (b) Beräkna projektionen av vektorn $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1, 1)$ till radrummet.
   (c) Ge ett argument för att skillnadsvektorn mellan $\mathbf{u}$ och dess projektion ligger i nollrummet.

6. Betrakta de tre vektorerna $p_1 = (1, 1, 0)$, $p_2 = (0, 1, 1)$ och $p_3 = (1, 0, 1)$. Låt oss också ha en avbildning som definieras av matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Beräkna den volym V i $\mathbb{R}^3$ som de tre vektorerna p_1, p_2 och p_3 spänner upp.
   (b) Hur stor blir volymen av de tre vektorerna efter att de transformerats med hjälp av matrisen M?

7. Lös matrisekvationen

$$AXB = C$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Givet är matriserna

$$A = \begin{bmatrix} a & a-c & c-a \\ a-b & a & b-a \\ a-b & a-c & -a+b+c \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestäm egenvektorer och egenvärden till matrisen A med hjälp av matrisen P.
   (b) Motivera att egenvektorerna i (a) bildar en bas, och beskriv matrisen A i dena bas.

Svar till tentamen i Linjär algebra, 20140819.

1. $x = 3$,$y = 2$, $z = 1$

2. 1

3. $y = 1.8x + 10.2$

4. Radrumsbas: $\{(1,1,0,0,1),(0,0,1,0,1),(0,0,0,1,0)\}$,
Kolonnrumsbas:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Nollrumsbas:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

5. (a) Många möjliga ortogonala baser, se lösningen för en variant

   (b) Projektionen blir $\frac{1}{5}(4,4,3,5,7)$

   (c) Skillnadsvektorn är vinkelrät mot radrummet och ligger därför i nollrummet.

6. (a) Volymen är 2

   (b) Den transformerade volymen är 18

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, 20140819.

1. Här är lösningen:

L: Genom att pivotera

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 20 \\ 1 & 2 & 7 & 14 \\ 2 & -3 & a & a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -8 & -8 \\ 1 & 2 & 7 & 14 \\ 0 & 1 & (a-14)/(-7) & (a-28)/(-7) \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 14 \\ 0 & 1 & 2-\frac{a}{7} & 4-\frac{a}{7} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

x = 3, y = 2, z= 1 Detta gäller för samtliga *a*.

Man kan även utveckla determinanten till den icke-utökade matrisen varvid man ser att *a* försvinner då underdeterminanten till den del där *a* är med har svaret 0.

2. Lösning::

Skriv om i polär form: $(\sqrt{3}+i) \quad = 2e^{i\pi/6}$

$$(1+\sqrt{3}i) \quad = 2e^{i\pi/3}$$

$$(1+i) \quad = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^2(1+i)^4}{(1+\sqrt{3}i)^4} = \frac{(2e^{i\pi/6})^2(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^4}{(2e^{i\pi/3})^4} = 2^2\sqrt{2}^4 2^{-4} e^{i\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{4\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)} = 1$$

3. Lösning:

L: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$

$$A^T A = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}8 \\ 10{,}2 \end{bmatrix}$$

$y = 1{,}8\,x + 10{,}2$

4. Radreducera matrisen:

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Från denna matris har vi att de tre nollskillda raderna blir basen för radrummet. Eftersom pivotelementen står i kolonn 1, 3 och 4 så är dessa kolonner i matrisen M bas för kolonnrummet. Eftersom kolonn 2 och 5 saknar pivotelement så är variablerna som motsvarar dessa kolonner fria variabler. Kallar vi kolonnvariablerna för $x_1, \dots x_5$ så har vi att $x_2 = s$ och $x_5 = t$ är fria variabler och vi kan ställa upp lösningarna till $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

5. Låt oss kalla radrummet till M för $\mathcal{R}_M$

(a) För ON-basen så startar vi med basen vi fick från den reducerade matrisen i föregående uppgift:

$$v_1 = (1,1,0,0,1), \quad ,v_2 = (0,0,1,0,1), \quad v_3 = (0,0,0,1,0)$$

Vi noterar att det mesta arbetet redan är gjort eftersom v_1 och v_3 och v_2 och v_3 är ortogonala.

Som startpunkt för Gram-Schmidts metod väljer man t.ex. v_2 och v_3 som de första två vektorerna Den tredje och sista vektorn får vi från v_1 genom att subtrahera dess projektion

JU FLER NOLLOR I VEKTORERNA, DESTO BÄTTRE!

i rummet W som de två första spänner upp.

$$\begin{aligned}
g_1 &= v_2 = (0,0,1,0,1)\\
g_2 &= v_3 = (0,0,0,1,0)\\
g_3 &= v_1 - \mathbf{proj}_W v_1 = v_1 - (\mathbf{proj}_{g_1} v_1 + \mathbf{proj}_{g_2} v_1) =\\
&= v_1 - \frac{v_1 \bullet g_1}{||g_1||^2} g_1 - \frac{\overbrace{v_1 \bullet g_2}^{=0}}{||g_2||^2} g_2 = (1,1,0,0,1) - \frac{1}{2}(0,0,1,0,1) =\\
&= (1,1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(2,2,-1,0,1)
\end{aligned}$$

Dessa tre vektorer bildar nu en ortogonal bas och vi behöver bara normera dem för att få vår ortonormala bas:

$$\begin{aligned}
o_1 &= \frac{g_1}{||g_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,0,1)\\
o_1 &= \frac{g_2}{||g_2||} = (0,0,0,1,0) \qquad \text{denna hade ju redan längden ett!}\\
o_1 &= \frac{g_3}{||g_3||} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2,2,-1,0,1)
\end{aligned}$$

(b) Vi beräknar nu projektionen av $\mathbf{u}$ till $\mathcal{R}_M$

$$\begin{aligned}
\mathbf{proj}_{\mathcal{R}_M}\mathbf{u} &= (\mathbf{u} \bullet o_1)o_1 + (\mathbf{u} \bullet o_2)o_2 + (\mathbf{u} \bullet o_3)o_3 =\\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,0,1) + (0,0,0,1,0) + \frac{4}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(2,2,-1,0,1) =\\
&= (0,0,1,1,1) + \frac{2}{5}(2,2,-1,0,1) = \frac{1}{5}(4,4,3,5,7)
\end{aligned}$$

(c) Genom att använda nollrumsbasen från föregående uppgift så ser vi att vår projektionsvektor är ortogonal mot nollrummet:

$$\mathbf{proj}_{\mathcal{R}_M}\mathbf{u} \bullet (-1,1,0,0,0) = 0, \qquad \mathbf{proj}_{\mathcal{R}_M}\mathbf{u} \bullet (-1,0,-1,0,1) = 0$$

Detta är helt i sin ordning eftersom nollrummet är ortogonala komplementet till radrummet, dvs består av **alla** vektorer som är ortogonala mot radrummet. Skillnadsvektorn $\mathbf{u} - \mathbf{proj}_{\mathcal{R}_M}\mathbf{u}$ är, per definition av projektionen, ortogonal mot radrummet, och måste alltså ligga i nollrummet.

Man kan också visa detta direkt: Skillnadsvektorn blir

$$(1,1,1,1,1) - \frac{1}{5}(4,4,3,5,7) = \frac{1}{5}(1,1,2,0,-2)$$

För att visa att vektorn ligger i nollrummet så kan vi använda vår nollrumsbas och då behöver vi bestämma värden på s och t så att

$$\begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1\\ 0\\ -1\\ 0\\ 1 \end{bmatrix} t = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 2\\ 0\\ -2 \end{bmatrix}$$

Det följer direkt från rad 2 och rad 5 att $s = \frac{1}{5}$ och $t = -\frac{2}{5}$ och en snabb insättning visar att dessa värden ger oss likhet i ekvationen. Detta visar alltså explicit att vår skillnadsvektor faktiskt ligger i nollrummet.

6. (a) Om vi ställer upp våra vektorer som kolonner i en matris så får vi matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den volym vi söker är beloppet av determinanten av denna matris. Vi har alltså $V = |\det A| = 2$.

(b) När vi transformera vektorerna så multiplicerar vi vektorerna som kolonner från höger med matrisen M. De transformerade vektorerna uppställda som kolonner i en matris får vi genom att beräkna produkten $M \cdot A$:

$$M \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinanten av denna produkt är $\det(M \cdot A) = \det M \cdot \det A$ och då kan vi beräkna den sökta volymen utan att beräkna prodkukten explicit genom

$$\text{Volymen för bildvektorerna } = \det(M \cdot A) = \det M \cdot \det A = 9 \cdot 2 = 18,$$

Man behöver förstås beräkna determinanten för M som alltså anger den förstoringsfaktor som denna avbildningen har.

7. Vi vill lösa ut matrisen X ur ekvationen $AXB = C$.

Om matriserna A och B är inverterbara så kan vi lösa ut X genom att på lämpligt sätt multiplicera med dessa inverser:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I} X \underbrace{BB^{-1}}_{=I} = A^{-1}CB^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}CB^{-1}$$

Vi beräknar nu inverserna (denna räkning visar att matriserna verkligen är inverterbara):
Man ställer upp $(A|I) \sim (I|A^{-1})$ och får

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

.
På motsvarande sätt får vi

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Vi kan nu beräkna matrisen X som produkten

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & -19 \\ -5 & 13 \\ -8 & 22 \end{bmatrix}$$

8. (a) Den ledande idén är att inse att P's kolonner uppfyller

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=b\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},A\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

dvs att kolonnerna i P är egenvektorer till A, och att a, b och c är deras motsvarande egenvärdena.

(b) Man kontrollerar att P är icksingulär (inverterbar), varför dess kolonner, och därmed egenvektorerna i (a) är linjärt oberoende. Därmed bildar dessa vektorer en bas för $\mathbb{R}^3$ (som är ett vektorrum av dimension 3). Observera att detta gäller för alla val av a, b, c.

Eftersom matrisen P alltså består av linjärt oberoende egenvektorer så är P en diagonaliserande matris. Detta betyder att $P^{-1}AP$ blir en diagonalmatris och diagonalmatrisen har egenvärdena på diagonalen.

Diagonalisering av A innebär att man hittar den bas i vilken matrisen A blir diagonal. I denna bas (som alltså definieras av egenvektorsmatrisen P) blir matrisen A diagonal, med formen

$$\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}.$$