HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

För ingenjörs- och distansstudenter
LINJÄR ALGEBRA
ma014a
2015 01 14

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. (a) Bestäm alla värden på c som gör att matrisen $A(c)$ saknar invers:

$$A(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1+c \\ -1 & c & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   (b) Lös systemet

$$A(c)\mathbf{x} = b$$

   för varje värde på c som räknats fram i uppgift (a).

2. Lös ekvationen

$$z^5 + 16\sqrt{3} = 16i$$

3. Beräkna matriserna för följande operationer
   (a) Rotationen R_{30} moturs med 30°.
   (b) Speglingen S_y i y-axeln.
   (c) Rotationen R_{-60} medurs med 60°
   (d) Den avbildning A som är resultatet av att vi först roterar 30° moturs, sedan speglar i y-axeln och slutligen roterar 60° medurs. Identifiera den resulterande avbildningen, vad betyder den geometriskt?

4. Bestäm volymen av den cylinder[1] som definieras av att bottenarean är det parallellogram P som vektorerna $u = p_2 - p_1$ och $v = p_3 - p_1$ spänner upp, och höjden bestämd av avståndet från p_4 till det plan som P ligger i.

$$p_1 = (1, 1, -2), \quad p_2 = (3, 1, 1), \quad p_3 = (-2, -1, 2), \quad p_4 = (5, 3, 4)$$

5. Beräkna baser för radrum, kolonnrum och nollrum till matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

[1] En cylinder behöver inte vara en cirkulärcylindrisk konservburk utan basarean kan ha nästan vilken form som helst. Många mjölkförpackningar är cylindrar med rektangulärt eller kvadratiskt tvärsnitt, t.ex.

6. Beräkna det tredjegradspolynom på formen $y = bx^2 + cx^3$, vars graf bäst anpassar sig till följande punkterna p_i, $i = 1, \dots, 4$ vars x och y-koordinater återfinns i följande tabell

	p_1	p_2	p_3	p_4
x	0	1	2	3
y	1	3	2	1

Table 1: Mätdata för uppgift 6

7. (a) Visa att vektorerna $v_1 = (2, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 1, 2)$ och $v_3 = (1, 1, 1, 2))$ bildar en bas för ett delrum, som vi betecknar med W, till $\mathbb{R}^4$.
   (b) Beräkna projektionen av vektorn $b = (3, 2, 2, 3)$ till W.

8. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

   (a) Beräkna egenvärden och diagonalmatris till matrisen A
   (b) Beräkna egenvektorerna.
   (c) Beräkna ON-bas för varje egenrum.
   (d) Beräkna en matris P som ortogonalt diagonaliserar A.

Svar till tentamen i Linjär Algebra, 2015 01 14.

1. (a) $c = 0$ och $c = 1$

   (b) För $c = 0$ så saknas lösningar och för $c = 1$ så har vi lösningarna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$z = 2e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{5})}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

3.

4. Volymen är 34.

5.

6.

7.

8.

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra, 2015 01 14.

1. (a) Beräkna först determinanten till $A(c)$.

$$\det A(c) = c - c^2 = c(1-c)$$

Matrisen saknar invers precis för de värden på c som gör att determinanten blir noll. Tack vare faktoriseringen så ser vi att $c = 0$ och $c = 1$ är de värden som ger en singulär (icke inverterbar) matris.

(b) Om $c = 0$ så har vi systemet:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Den sista raden i den reducerade matrisen avslöjar (den säger att $0 = 1$) att detta system saknar lösningar.

Om $c = 1$ har vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Från denna matris har vi att $z = t$ är fri variabel, $y = 3$ och $x = z + 1 = t + 1$. Vi sammanfattar lösningen på parameterform som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Vi ska lösa ekvationen

$$z^5 = -16\sqrt{3} + 16i$$

Vi skriver om på polär form:

Vi har

$$16\sqrt{3} + 16i = 32e^{i(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k)},$$

eftersom

$$|-16\sqrt{3} + 16i| = \sqrt{(-16\sqrt{3})^2 + (16)^2} = \sqrt{16^2 \cdot (3+1)} = \sqrt{16^2 \cdot 2^2} = 16 \cdot 2 = 32$$

och principalargumentet blir

$$\arg(16\sqrt{3} + 16i) = 5\pi/6,$$

vilket vi får eftersom vårt komplexa tal ligger i andra kvadranten och dess vinkel till negativa reella axeln ges av

$$\arctan \frac{16}{16\sqrt{3}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

vilket ger att principalvinkeln ges av

$$\pi - \frac{\pi}{6}, = \frac{5\pi}{6},$$

Eftersom höger led på polär form blir

$$|z|^5 e^{5\theta i}$$

så får vi att

$$|z|^5 = 32 \quad \Rightarrow \quad |z| = 2$$

och att

$$5\theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{5}$$

Fem lösningar får vi t.ex. genom att låta $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Lösningarna blir

$$z = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{5})}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

3. (a)

$$R_{30} = \begin{bmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$R_{-60} = \begin{bmatrix} \cos -\pi/3 & -\sin -\pi/3 \\ \sin -\pi/3 & \cos -\pi/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(d) Den sökta avbildningen är produkten av matriserna i rätt ordning. Den första avbildningens matris ska stå längst till höger och de efterföljande till vänster om den första.

$$\begin{aligned} A = R_{-60}S_yR_{30} &= \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Den resulterande matrisen svarar geometriskt mot en spegling i linjen $y = x$.

4. Volymen V för cylindern är produkten av bottenareans area A och höjden h,

$$V = A \cdot h.$$

Bottenarean A, som är arean av det parallellogram som vektorerna u och v spänner upp bestäms av kryssprodukten $u \times v$'s längd:

$$\begin{aligned} u &= p_2 - p_1 = (3, 1, 1) - (1, 1, -2) = (2, 0, 3) \\ v &= p_3 - p_1 = (-2, -1, 2) - (1, 1, -2) = (-3, -2, 4) \end{aligned}$$

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = (6, -17, -4)$$

$$A = ||u \times v|| = \sqrt{6^2 + (-17)^2 + (-4)^2} = \sqrt{341}$$

För att bestämma höjden så behöver vi beräkna avståndet från p_4 till det plan som vårt parallellogram ligger i. Detta kan man göra på flera olika sätt. Det enklaste för oss är att notera att avståndet kan beräknas genom att man projicerar en skillnadsvektor mellan p_4 och planet på planets normalvektor. Planets normalvektor ges ju av $n = u \times v$ så denna har vi just räknat ut! Längden av denna projektion är vår höjd.

Som skillnadsvektor kan vi ta

$$a = p_4 - p_1 = (5, 3, 4) - (1, 1, -2) = (4, 2, 6)$$

Längden av projektionen av denna skillnadsvektor på planets normal vektor ges av

$$h = ||\mathbf{proj}_n a|| = \frac{|a \bullet n|}{||n||} = \frac{|(4, 2, 6) \bullet (6, -17, -4)|}{\sqrt{341}} = \frac{34}{\sqrt{341}}$$

Nu kan vi beräkna volymen:

$$V = A \cdot h = \sqrt{341} \cdot \frac{34}{\sqrt{341}} = 34$$

5. Vi börjar med att radreducera matrisen med Gauss-Jordan eliminering:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 5 & 12 & 9 \\ 0 & 9 & 0 & 10 & -12 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & -7 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

med en multiplikation med 9 så har vi sluppit bråk

Radvektorerna i denna reducerade matris bildar en bas för radrummet. Eftersom de ledande niorna står i de tre första kolonnerna så är de tre första kolonnerna av M en bas för kolonnrummet.

Nollrumsbasen får vi genom att först identifiera de fria variablerna som är de tre sista. Kallar vi systemets $Ax = 0$ variabler för $x_1, \ldots x_6$ så har vi att $x_4 = 9s$, $x_5 = 9t$ och $x_6 = 9u$ är fria där vi valt att kalla parametrarna för $9s$, $9t$ och $9u$ för att slippa bråkuttryck. u, s och t är godtyckliga fria tal. Löser vi ut de ledande variablerna x_1, x_2 och x_3 så får vi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \\ 7 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -12 \\ 12 \\ -3 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -9 \\ -9 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} u$$

De tre vektorerna i detta uttryck är basen för nollrummet.

6. Sätter vi in punkternas x och y värden i $bx^2 + cx^3 = y$ så får vi följande ekvationssystem i de obekanta talen b och c::

$$\begin{aligned} 0b + 0c &= 1 \\ b + c &= 3 \\ 4b + 8c &= 2 \\ 9b + 27c &= 1 \end{aligned}$$

På matrisform så har vi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 8 \\ 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta system är uppenbarligen inkonsistent men vi söker ju minstakvadratlösning vilket innebär att vi fortsätter genom att multiplicera båda led med vänsterledsmatrisens transponat

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 8 \\ 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi får då det lösbara systemet

$$\begin{bmatrix} 81 & 276 \\ 276 & 794 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 46 \end{bmatrix}$$

som har lösningen

$$\begin{bmatrix} b \\ \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{796}{409} \\ \\ -\frac{253}{409} \end{bmatrix}$$

vilket ger att det optimala polynomet är

$$y = \frac{796}{409}x^2 - \frac{253}{409}x^3$$

7. (a) Vektorerna bildar en bas för det delrum som de spänner upp om de är linjärt oberoende. Vi har alltså

$$W = Span\{v_1, v_2, v_3\}$$

Vi använder Gausselimination för att visa att de är oberoende: Vi ställer upp vektorerna som rader i en matris och radelilminerar

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Eftersom vi inte får en nollrad så är våra vektorer linjärt oberoende och bildar därför en bas för W

(b) För att beräkna projektionen så finns det minst två olika sätt:

1 :: Bilda ON-bas Idén här är att vi använder våra basvektorer och gör om dem till en ortonormal bas. När vi sedan har en sådan bas kan vi beräkna projektionen till W genom att projicera b till varje enskild ON-bas vektor. Ortonormaliteten garanterar (se Lay Theorem 10 i kapitel 6.3) att projektionen till W är summan av basvektorprojektionerna. För att starta Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess så börjar vi med att notera att vi faktiskt söker ON-bas för radrummet till matrisen med våra vektorer som rader. Då följer det att raderna i vår eliminerade matris också är bas för detta radrum och eftersom dessa rader är enklare så kan vi använda dem som utgångspunkt för Gram-Schmidts process. Det här är jättebra eftersom rad 2 redan är ortogonal mot både rad 1 och rad 3. Vi låter därför rad 2 och rad 1 vara våra första två vektorer i G-S-processen.

$$u_1 = (1, 0, 0, -1), \qquad u_2 = (0, 1, 0, 0)$$

Dessa är ortogonal och den tredje ortogonala vektorn u_3 får vi från vektorn $a = (0,0,1,3)$ genom

$$\begin{aligned} u_3 &= a - \mathbf{proj}_{u_1} a - \mathbf{proj}_{u_2} a \\ &= (0,0,1,3) - \frac{(0,0,1,3) \bullet (1,0,0,-1)}{||(1,0,0,-1)||^2}(1,0,0,-1) - \underbrace{\frac{(0,0,1,3) \bullet (0,1,0,0)}{||(0,1,0,0)||^2}(0,1,0,0)}_{=0} = \\ &= (0,0,1,3) + \frac{3}{2}(1,0,0,-1) = (\frac{3}{2},0,1,\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}(3,0,2,3) \end{aligned}$$

Normering av de tre ortogonala vektorerna ger oss ON-basen

$$o_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1), \quad o_2 = (0,1,0,0), \quad o_3 = \frac{1}{\sqrt{22}}(3,0,2,3)$$

Nu kan vi beräkna projektionen av b till W:

$$\begin{aligned} \mathbf{proj}_W b &= \underbrace{(b \bullet o_1)}_{=0} o_1 + (b \bullet o_2) o_2 + (b \bullet o_3) o_3 \\ &= (0,2,0,0) + \frac{22}{\sqrt{22}} \cdot \frac{(3,0,2,3)}{\sqrt{22}} = (0,2,0,0) + (3,0,2,3) = (3,2,2,3) \end{aligned}$$

Vi noterar att detta är vektorn b själv! Detta betyder att b faktiskt ligger i W.

Notering :: Den observante hade nog kunnat se detta direkt eftersom $b = v_1 + v_3$.

2 :: Minsta kvadratmetoden Här låter vi

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

och söker minsta kvadratlösningen till $Ax = b$. Denna får vi genom att lösa $A^T Ax = A^T b$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 8 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^T b = \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Systemet och dess lösning får vi genom att radreducera systemets utvidgade matris

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 & 6 & 13 \\ 7 & 10 & 8 & 15 \\ 6 & 8 & 7 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Här får vi att minsta kvadratlösningen står i höger led och denna anger koordinaterna för vår projektion m.a.p basen $\{v_1, v_2, v_3\}$ Dvs

$$\mathbf{proj}_W b = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = (2,1,1,1) + (1,1,1,2) = (3,2,2,3),$$

vilket betyder att vår vektor b faktiskt ligger i W.

8. Beräkna först egenvärdena:

Egenvärdet 6 ser man direkt eftersom detta värde gör att andra raden i $A - \lambda I$ är en nollrad. Karakteristiska polynomet blir

$$c(\lambda) = \lambda^3 - 16\lambda^2 + 84\lambda - 144$$

Polynomdivistion med $\lambda - 6$ ger:

$$c(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda^2 - 10\lambda + 24) = (\lambda - 6)^2(\lambda - 4)$$

som blir 4 (enkelt egenvärde) och 6 som är ett dubbelt egenvärde.

Lös sedan $(A - \lambda I) = 0$ för dessa två egenvärden, detta ger baser för de båda egenrummen. Se till att de båda egenrummens baser är ON-baser och tillsammans blir de båda ON-baserna en ortonormal uppsättning egenvektorer. Ställ dessa som kolonnvektorer i en matris så har vi fått vår ortogonalt diagonaliserande matris.