HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

För ingenjörs- och distansstudenter
LINJÄR ALGEBRA
ma014a
2015 02 26

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Lös ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. Lös binomekvationen

$$z^4 - 2 - i2\sqrt{3} = 0$$

3. Ge villkor på vektorn $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ som garanterar att den ligger i linjära höljet (span) av vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 0)$ och $\mathbf{v}_4 = (2, 1, 1, 2)$

4. Beräkna matriserna

   S_{xy} **:** spegling i linjen $y = x$

   S_y **:** spegling i y-axeln

   $R_{30°}$ **:** rotation moturs med $\pi/6$ (dvs $30°$).

   Använd sedan dessa tre matriser för att beräkna matrisen M för den avbildning som först speglar i linjen $y = x$, sedan roterar moturs med $30°$ och slutligen speglar i y-axeln. Identifiera den resulterande geometriska operationen.

5. Beräkna baser för radrum, kolonnrum och nollrum till matrisen

$$M_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

6. Beräkna ON-bas för radrummet till matrisen M_5 i föregående uppgift. Beräkna projektionen av vektorn $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1, 1)$ ned till detta delrum.

7. Låt
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
vara matrisen som överför vektorer uttryckta i basen B till vektorer uttryckta i basen A. Låt vektorerna $(1,3,3),(3,1,3),(3,3,1)$ vara standardbasvektorerna uttryckta i basen A. Beräkna basbytesmatrisen som överför vektorer uttryckta i basen B till vektorer uttryckta i standardbasen.

8. Bestäm den basbytes matris som ortogonalt diagonaliserar matrisen
$$M_8 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Svar till tentamen i Linjär Algebra, 2015 02 26.

1.
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.
$$z = \sqrt{2} e^{i(\pi/12 + \pi/2k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

3.
$$2b_1 - b_2 - b_3 - b_4 = 0$$

4.

5.

6.

7.

8.

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra, 2015 02 26.

1. Vi ställer upp systemet på matrisform. Efter ett inledande radbyte har vi en etta längst upp till vänster och sedan gör vi Gauss-Jordan elimintering ::

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \text{byte rad 1 och rad 3} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Från detta får vi att x och y är ledande variabler och vi har $z = 3t$ är fri (trean är bara för att snygga till lite). Lösningen blir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Vi skriver upp ekvationen på normal form ::

$$z^4 = 2 + i2\sqrt{3}$$

Sedan skriver vi om på polär form ::

$$|z|^4 e^{i\alpha} = 4(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}) = 4e^{i\pi/3+2\pi k}$$

Ekvation för beloppet ::

$$|z|^4 = 4 \quad \Rightarrow \quad |z| = 4^{1/4} = \sqrt{2}$$

Ekvation för argumentet ::

$$4\alpha = \pi/3 + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pi/12 + \pi/2k$$

Fyra på varandra följande värden på k ger oss de fyra lösningar vi söker ::

$$z = \sqrt{2}e^{i(\pi/12+\pi/2k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

3. Att $\mathbf{b}$ ska ligga i linjära höljet betyder att det ska finnas en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_i$, $i = 1 \ldots 4$:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Detta system blir därför på utvidgad matrisform :: som vi Gausseliminerar direkt ::

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & b_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_1 - b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_1 - b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \end{array}\right]$$

Här ser vi direkt att systemet har lösningar (är konsistent) om villkoret

$$2b_1 - b_2 - b_3 - b_4 = 0$$

är uppfyllt.

4.

$$S_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_{30^\circ} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Sammansättningen fås genom att multiplicera dessa matriser med varandra, i rätt ordning. Den första operationens matris ska stå längst till höger och de efterföljande till vänster om den första:

$$M = S_y R_{30^\circ} S_{xy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Den resulterande operationen är en rotation moturs med vinkeln $\pi/3$ eller 60°.

5. Vi Radreducerar matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & -1 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Baser för radrummet är de tre nollskillda raderna i den reducerade matrisen:

$$\text{Bas för radrummet} = \{r_1 = (1,0,2,0,-1), r_2 = (0,1,1,0,2), r_3 = (0,0,0,1,1)\}$$

Bas för kolonnrummet får vi genom att identifiera de kolonner i den reducerade matrisen som innehåller ledande element. Detta ger oss kolonn nummer 1, 2 och 4. En bas för kolonnrummet får vi genom att ta kolonn 1 ,2 och 4 från ursprungsmatrisen M_5:

$$\text{Bas för Kolonnrummet } = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Bas för nollrummet hittar vi genom att lösa $Ax = 0$. Radreduktion ger oss matrisen

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Genom att identifiera de ledande variablerna: x_1, x_2, x_4 och de fria $x_3 = s$ och $x_5 = t$ så får vi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

som ger att de två vektorerna i höger led är bas för nollrummet.

6. Starta från basen i föregående uppgift och notera att de två första vektorerna redan är ortogonala. Beräkna nu projektionen av den tredje vektorn på vardera av de två första och subtrahera dessa projektioner från den tredje vektorn. Resultatet blir då en vektor som är vinkelrät mot de två första och vi har då en ortogonal bas för radrummet. Normera slutligen de tre vektorerna och vi är klara med ON-basen.

Vi har alltså

$$\begin{aligned}
b_1 &= r_1 = (1, 0, 2, 0, -1) \\
b_2 &= r_2 = (0, 1, 1, 0, 2) \\
b_3 &= r_3 - \mathbf{proj}_{b_1} r_3 - \mathbf{proj}_{b_2} r_3 = r_3 - \frac{r_3 \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1} b_1 - \frac{r_3 \bullet b_2}{b_2 \bullet b_2} b_2 = \\
&= (0, 0, 0, 1, 1) - \frac{-1}{6}(1, 0, 2, 0, -1) - \frac{2}{6}(0, 1, 1, 0, 2) = \\
&= \frac{1}{6}((0, 0, 0, 6, 6) + (1, 0, 2, 0, -1) - (0, 2, 2, 0, 4)) = \\
&= \frac{1}{6}(1, -2, 0, 6, 1)
\end{aligned}$$

Nu måste vi normera vektorerna, vilket ger oss vår ON-bas:

$$\begin{aligned}
o_1 &= \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 2, 0, -1) \\
o_2 &= \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, 0, 2) \\
o_3 &= \frac{b_3}{||b_3||} = \frac{1}{\sqrt{42}}(1, -2, 0, 6, 1)
\end{aligned}$$

Det finns många andra möjliga ON-baser. Vad man får beror av vilken bas man startar med...

7. Den givna matrisen är

$$P_{A \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Givet är också basbytesmatrisen från standardkoordinater till A-koordinater ::

$$P_{A \leftarrow S} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Uppgiften söker efter basbytesmatrisen $P_{S \leftarrow B}$ och består av B?s basvektorer uttryckta i standardbasen. Denna matris får vi genom sammansättningen

$$P_{S \leftarrow B} = \underbrace{P_{S \leftarrow A}}_{=(P_{A \leftarrow S})^{-1}} P_{A \leftarrow B} = (P_{A \leftarrow S})^{-1} P_{A \leftarrow B}$$

Matrisen $(P_{A \leftarrow S})^{-1}$ kan vi beräkna genom uppställningen

$$(P_{A \leftarrow S} | P_{A \leftarrow B}) \sim (I | (P_{A \leftarrow S})^{-1} P_{A \leftarrow B}),$$

där vi radreducerar tills identitetsmatrisen står till vänster och vår produkt till höger.:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{14} & \frac{5}{14} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} & \frac{5}{14} \end{array}\right]$$

som ger oss den matris vi söker

$$P_{S\leftarrow B} = (P_{A\leftarrow S})^{-1}P_{A\leftarrow B} = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{5}{14} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

8. Eftersom matrisen är symmetrisk så finns det verkligen en ortogonal matris som diagonaliserar matrisen. Den ortogonala matrisen har kolonner som är egenvektorer till matrisen. Eftersom matrisen är symmetrisk så är egenvektorer till olika egenvärden automatiskt ortogonala. Om vi har ett multippelt egenvärde så är egenvektorerna till detta inte automatiskt ortogonala mot varandra och i ett sådant fall behöver man använda Gram-Schmidt för att bestämma ortogonal bas för detta egenrum.

För vår aktuella uppgift så behvöver vi börja med att beräkna egenvärdena och sedan egenvektorerna. När egenvektorerna är beräknade så behöver vi se till att vi får fram ortogonala egenvektorer som har längden 1. När vi har denna OrtoNormala uppsättning egenvektorer så ställer vi upp dem som kolonner i en matris och då har vi fått vår ortogonala matris.

Egenvärden :: Lös $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4 = -(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Faktoriseringen i sista steget får vi genom att beräkna nollställena till tredjegradspolynomet. Genom att gissa på delarna $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ till konstanttermen -4 och sätta in dem i polynomet så får vi att ± 1 och 4 är nollställena vilket alltså ger faktoriseringen. Dessa tre tal är våra egenvärden.

Vi har alltså tre olika enkla egenvärden. Egenvektorerna till dessa är därför automatiskt ortogonala (eftersom A är symmetrisk). Vi har kvar att beräkna dessa egenvektorer och sedan normalisera dem.

Egenvektorer ::

$\boxed{\lambda = 1 \;::}$ Lös $(A - I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Från detta får vi att

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} t, \qquad e_{\lambda=1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

beskriver egenrummet med normaliserad egenvektor $e_{\lambda=1}$.

$\boxed{\lambda = -1 \;::}$ Lös $(A + I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Från detta får vi att

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t, \qquad e_{\lambda=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

beskriver egenrummet med normaliserad egenvektor $e_{\lambda=-1}$.

$\boxed{\lambda = 1 ::}$ Lös $(A - 4I)x = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Från detta får vi att

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \qquad e_{\lambda=1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

beskriver egenrummet med normaliserad egenvektor $e_{\lambda=4}$.

Den ortogonalt diagonaliserande matrisen::

Matrisen vi söker har de normaliserade egenvektorerna som kolonner (vi har naturligtvis verifierat att egenvektorerna verkligen är ortogonala mot varandra)

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$