HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg :: 0734-41 23 31
Rolf Källström :: 070-622 93 09

För ingenjörs- och distansstudenter
LINJÄR ALGEBRA
ma014a
2015 03 24

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel.
Lösningarna skall vara noggrant motiverade och prydligt nedskrivna (använd svenska språket!); ofullständig motivering kan ge poängavdrag. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Beräkna alla lösningar till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Beräkna alla lösningar till

$$z^5 = -16 + 16i\sqrt{3}$$

3. Beräkna baser för rad, kolonn och nollrum till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Beräkna projektionen av vektorn $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ till det delrum W som spänns av vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1), \qquad \text{och} \qquad \mathbf{u}_2 = (-1, 3, 1)$$

   Hur stor är arean av det parallellogram som $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ spänner upp?

5. Bestäm den ellips på formen $ax^2 + by^2 = 1$ som bäst anpassar sig till punkterna

$$p_1 = (3, 0), \quad p_2 = (0, 2), \quad p_3 = (-3, 0), \quad p_4 = (0, -1)$$

6. Avbildningen $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ bildas genom att först spegla i linjen $y = x$ och sedan rotera moturs med $\pi/2$.

   Vi söker en matrisavbildning X som gör att ovanstående avbildning S fås genom att först rotera moturs med $\pi/2$ och sedan utföra X.

   Matriserna för alla ingående operationer ska beräknas.

7. Låt oss ha två baser i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

   där alla vektorer är uttryckta i standardbasen.

   Beräkna den matris som överför vektorer uttryckta i basen $\mathcal{A}$ till vektorer uttryckta i basen $\mathcal{B}$.

8. Bestäm den matris som ortogonalt diagonaliserar matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Svar till tentamen i Linjär Algebra, 2015 03 24.

1.

2.
$$z = 2e^{i(\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

3.

4. Projektionen är $(0, 1, 0)$ och parallellogramarean blir $\sqrt{50}$

5.

6.

7.

8.

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra, 2015 03 24.

1. Vi ställer upp ekvationen på utvidgad matris form och eliminerar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Här har vi att x och y är ledande variabler och $z = t$ är fri. Den eliminerade matrisen ger oss lösningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Skriv ekvationen på polär form: Vi har att

$$-16 + 16i\sqrt{3} = 2^5 \left[\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right] = 2^5 e^{i2\pi/3} = 2^5 e^{i(2\pi/3 + 2\pi k)}$$

Vilket ger att ekvationen blir

$$|z|^5 e^{i5\alpha} = 2^5 e^{i(2\pi/3 + 2\pi k)}$$

Ekvation för beloppet

$$|z|^5 = 2^5 \quad \Rightarrow \quad |z| = 2$$

Ekvation för argumentet:

$$5\alpha = 2\pi/3 + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}k,$$

Vi väljer t.ex. $k = 0, 1, 2, 3, 4$ för att få fem olika lösningar till vår binomekvation.

Lösningarna blir alltså

$$z = 2e^{i(\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}k)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

3. Radreduktion ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De två nollskillda raderna i den reducerade matrisen utgör bas för radrummet. Eftersom de ledande elementen står i kolonn 1 och 2 så är kolonn 1 och 2 i matrisen A bas för kolonnrummet.

För att beräkna nollrummet så noterar vi först att vi har fem kolonner och två ledande element. Detta ger att vi har 3 fria variabler vilket ger att nollrummet är 3-dimensionellt och vi ska alltså få 3 basvektorer. Om vi kallar variablerna för $x_1, \ldots, x_5$ så får vi att $x_3 = s$, $x_4 = t$ och $x_5 = u$ är fria variabler (dessa variablers kolonner saknar ledande element). Den reducerade matrisen ger nu att

$$x_1 = -x_3 - x_4 - x_5 = -s - t - u$$
$$x_2 = x_3 + x_4 = s + t$$

och detta ger oss att nollrummet kan skrivas

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

och de tre vektorerna i höger led bildar bas för nollrummet.

4. Projektionen beräknas enklast genom att projicera på normalvektorn $\mathbf{n} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$: Denna normalvektor blir

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (5,0,5)$$

Vi beräknar nu projektionen

$$\begin{aligned} \mathbf{proj}_W \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{v} = (1,1,1) - \frac{(1,1,1) \bullet (5,0,5)}{50}(5,0,5) = \\ = (1,1,1) - (1,0,1) = (0,1,0) \end{aligned}$$

Den area som parallellogrammet spänner upp ges av längden till kryssprodukten:

$$A = ||\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2|| = ||(5,0,5)|| = \sqrt{50}$$

5. Punkterna insatta i ellipsekvationen ger oss följande ekvationssystem i variablerna a och b:

$$\begin{aligned} 9a + 0 \cdot b &= 1 \\ 0 \cdot a + 4b &= 1 \\ 9a + 0 \cdot b &= 1 \\ 0 \cdot a + b &= 1 \end{aligned}$$

På matrisform får vi

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \\ 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalekvationen :: $(A^T A x = A^T b)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 162 & 0 & 18 \\ 0 & 17 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & \frac{5}{17} \end{array}\right]$$

som ger oss ellipsekvationen

$$\frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{17}y^2 = 1$$

6. Vi har

$$S_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R_{\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Det vi ska göra i uppgiften är att lösa ekvationen

$$X R_{\pi/2} = R_{\pi/2} S_{xy} \quad \Rightarrow \quad X = R_{\pi/2} S_{xy} R_{\pi/2}^{-1}$$

Vi har att

$$R_{\pi/2}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Så den sökta matrisen blir

$$X = R_{\pi/2} S_{xy} R_{\pi/2}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Geometriskt så är X en spegling i linjen $y = -x$.

7. Vi har att byte från baserna $\mathcal{A}$ respektive basen $\mathcal{B}$ till standardbasen ges av matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Den matris vi söker är $B^{-1}A$ och denna produkt beräknas genom uppställningen

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

och vi får att den matris som överför vektorer uttryckta i $\mathcal{A}$ till vektorer uttryckta i $\mathcal{B}$ ges av matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

8. Idén är att först beräkna egenvärden, sedan egenvektorerna. Vår matris är symmetrisk och detta innebär att egenvektorer till olika egenvärden är ortogonala. För att få den ortogonalt diagonaliserande matrisen så behöver vi ortogonala egenvektorer som har längden 1. Detta innebär att alla egenvektorer vi beräknat behöver normeras.

Egenvärden :: Vi börjar med att beräkna egenvärdena genom den karakteristiska ekvationen $c(x) = \det(M - xI)$:

$$c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5$$

Genom att gissa nollställen (testa delarna till konstanttermen -5, $\pm 1, \pm 5$ och detta ger att $\lambda = \pm 1$ samt $\lambda = 5$ är egenvärden.

Egenvektorer :: Vi löser $(A - \lambda I)x = 0$ för våra egenvärden :

$\lambda = 1$ ::

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss egenvektorer som är parallella med

$$e_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1$ ::

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss egenvektorer som är parallella med

$$e_{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 5$ ::

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss egenvektorer som är parallella med

$$e_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Den diagonaliserande matrisen :: Den diagonaliserande matrisen har egenvektorer som kolonner. Eftersom vi har en symmetrisk matris med tre olika egenvärden så är de tre egenvektorerna ortogonala (åtminstone om vi räknat rätt...) Genom att normera vektorerna så har vi en OrtoNormal uppsättning egenvektorer och ställer vi upp dessa ortonormala egenvektorer i en matris så har vi vår ortogonalt diagonaliserande matris P:

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$