HÖGSKOLAN I GÄVLE

Akademin för teknik och miljö

Sören Hector, tel. 070-4616086,
Mikael Forsberg, tel 073-4412331,
Rolf Källström, tel 070-6229309.

Matematiktentamen
Ingenjörer, lärare, m fl

LINJÄR ALGEBRA
ma014a.
2015–05–29

Skrivtid: 09.00–14.00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara noggrant motiverade och prydligt nedskrivna (använd svenska språket!); ofullständig motivering kan ge poängavdrag. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. Verifiera att matriserna

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 8 \\ -7/2 & 13/2 & -9/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

är varandras inverser och lös ekvationssytemet

$$\begin{pmatrix} 6 & -11 & 8 \\ -7/2 & 13/2 & -9/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Bestäm det komplexa talet z som löser ekvationen

$$z + i\bar{z} = 2 + i.$$

(b) Bestäm argumentet till det komplexa talet

$$\frac{(2+2i)(1-i)}{(1+i)^5}.$$

3. Bestäm h så att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -7 & -1 & 12 \\ -16 & 16 & h \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix},$$

har oändligt många lösningar. Fullständig motivation krävs (det är inte en bra idé att använda determinanten ...)

4. Bestäm avståndet från punkten $(1, 1, 1)$ till linjen

$$L : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

5. Givet är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestäm rangen för A samt hitta baser för radrummet row (A) och kolonnrummet col (A).

6. Bestäm en ortogonal bas för det rum som spänns upp av följande mängd av vektorer

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

7. Hookes lag i mekaniken säger att kraften f som krävs att dra ut (eller trycka ihop) en fjäder är en linjär funktion av uttänjningen x av fjädern, dvs

$$f = kx + a$$

där k och a är materialkonstanter som endast beror på fjädern. Följande tabell mättes upp (i lämpliga enheter) för en speciell fjäder:

x	1	2	3
f	1	3	3

Bestäm bästa approximationen, i minsta kvadratmening, av mätdata med en sådan linjär funktion och använd detta för att uppskatta fjäderkonstanten k.

8. Låt

$$S = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

vara standardbasen för $\mathbf{R}^3$ och sätt $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Definiera den linjära transformationen

$$\begin{aligned} T : \mathbf{R}^3 &\to \mathbf{R}^3, \\ \mathbf{v} &\mapsto T(\mathbf{v}) = \mathbf{a} \times \mathbf{v}. \end{aligned}$$

(a) Bestäm matrisen $A = [T]$ för T i standardbasen S.

(b) Bestäm en vektor $\mathbf{v}$ så att $T(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

(c) Beskriv geometriskt (med en bild) kolonnrummet col A är.

1. Elementära räkningar visar att $AB = BA = I$, identitetsmatrisen med storlek 3×3. Multiplicerar man ekvataionssystemet $B\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ med A får man

$$AB\bar{x} = \bar{x} = A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}.}$$

3. Vi skriver ned den utökade matrisen och bildar trappstegsform

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 6 \\ -7 & -1 & 12 & 3 \\ -16 & 16 & h & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 32 & 64 & 51 \\ 0 & 0 & h-64 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser från sista raden att när $\boxed{\text{h=64}}$ får man en nollrad varpå vi får en fri variabel, vilket innebär att systemet för detta värde har oändligt många lösningar.

4. Låt $P = (1,1,1)$. Välj först en godtycklig punkt på linjen t ex $R = (1,1,0)$ (svarar mot $t = 0$). Bilda vektorn $\overline{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Normera L:s riktningsvektor till $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ varpå avståndet blir $d = |\overline{PR} \times \bar{v}|$. Vi har $\overline{PR} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alltså blir avståndet

$$d = \boxed{\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.}$$

5. Vi har

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser från detta att en bas för radrummet ges av $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\}$. Eftersom kolonn nr 1 och 3 är pivoteringskolonnerna i den andra trappstegsformade matrisen, är dessa en bas för den andra matrisens kolonnrum. Därmed är motsvarande kolonner i A en bas för col A, dvs man har basen

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Vidare har vi

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{row}\ A = \dim \operatorname{col}\ A = 2.$$

6. Vi använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Sätt därför $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi bildar en vektor som är ortogonal mot $\mathbf{u}_1$ mha $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, genom

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Vi bildar en vektor $\mathbf{u}_3$ som är ortogonal mot $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ mha $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - (\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-1/3}{2/3}\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Det är nu lätt att kontrollera att

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}\}$$

är ömsesidigt ortogonala vektorer i $\mathbf{R}^3$, och tillsammans bildar de därmed en ortogonal bas.

7. Ekvationen för en (icke-vertikal) rät linje är $y = kx + m$. Vi vill approximera vektorn $(1, 3, 3)$ med en vektor på formen $(k + m, 2k + m, 3k + m)$. I matrisform $A\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Normalekvationerna för det val av (k, m) som ger minsta värde på $\|A\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\|$, där $\| \cdot \|$ är vanliga längden av en vektor, ges av $A^tA\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = A^t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Utskrivet är detta:

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Vi löser med gausselimination

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 16 \\ 6 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 7 \\ 14 & 6 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 7/6 \\ 14 & 6 & 16 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7/6 \\ 0 & -1 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right).$$

Så välj $\boxed{k = 1 \text{ och } m = 1/3.}$ Vi får att fjäderkonstanten k uppmätes till $k = 1$.

8. (a) Även om det inte efterfrågas kan vi kontrollera att T verkligen är en linjär transformation: Tag en linjärkombination $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{R}^3$ så får vi

$$\begin{aligned} T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) &= \mathbf{a} \times (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) \\ &= \{ \text{ kryssprodukten är en linjär operator} \} \\ &= c_1\mathbf{a} \times \mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{a} \times \mathbf{v}_2 \\ &= c_1 T(\mathbf{v}_1) + c_2 T(\mathbf{v}_2), \end{aligned}$$

vilket är precis vad det betyder att T är linjär. Vi utnyttjar nu att $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ samt regler för kryssprodukten

Standardmatrisen i basen S ges av $A = [T] = ([T(\mathbf{e}_1)]_S \; [T(\mathbf{e}_2)]_S \; [T(\mathbf{e}_3)]_S)$. Vi har

$$T(\mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \quad [T(\mathbf{e}_1)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad [T(\mathbf{e}_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1, \quad [T(\mathbf{e}_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vilket ger

$$A = [T] = ([T(\mathbf{e}_1)]_S \; [T(\mathbf{e}_2)]_S \; [T(\mathbf{e}_3)]_S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Ekvationen $T(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ har koordinatformen (i basen S)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} [\mathbf{v}]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vilken löses på vanligt sätt, eller man läser av, till $[\mathbf{v}]_S = (-1, 0, 1)$, dvs $\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$.

(c) Kolonnrummet ges av alla vektorer som kan skrivas $\mathbf{a} \times \mathbf{v}$ för någon vektor $\mathbf{v}$. Detta ges av alla vektorer som är vinkelräta mot vektorn $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, vilket är ett plan med normalvektor $(1, 1, 0)$ som innehåller origo.