HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

Matematik med datalogi, mfl.
LINJÄR ALGEBRA
mag041
2016 03 01

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

FRÅGORNA 1 TILL 6 SKA SVARAS MED ETT KRYSS FÖR VARJE KORREKT PÅSTÅENDE. VARJE UPPGIFT GER 1 POÄNG.

ANVÄND BIFOGAT FORMULÄR FÖR DESSA 6 FRÅGOR.

1. Låt A vara en $n \times n$ matris. Vilka av följande påstående är inte ekvivalent med att A's nollrum är nolldimensionellt?
   (a) Rang $A = n$
   (b) $\det A = 0$
   (c) Ekvationssystemet $Ax = b$ är konsistent för alla $b \in \mathbb{R}^n$
   (d) A är inverterbar
   (e) A har egenvärdet $\lambda = 0$

2. Ange vad som är falskt för skärningen mellan olika delrum
   (a) Snittet mellan två godtyckliga delrum är aldrig tomt
   (b) Snittet mellan två godtyckliga är ett delrum
   (c) Snittet mellan två icke sammanfallande tvådimensionella delrum blir alltid ett endimensionellt delrum.
   (d) Unionen av två delrum är ett delrum
   (e) Om W är ett delrum av V och V är ett delrum av U så är W ett delrum av U.

3. Vilka av följande matriser är inte ortogonala
   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
   (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
   (c) $C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$
   (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
   (e) $E = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. Ange de påståenden om baser som är falska

   (a) Alla baser för ett och samma delrum har lika många vektorer.

   (b) Tre vektorer som spänner upp ett rum är också en bas för rummet.

   (c) Tre oberoende vektorer bildar en bas för det rum de spänner upp.

   (d) En bas för ett tvådimensionellt delrum W av $\mathbb{R}^4$ består av två vektorer. Koordinatvektorn $[w]$ för en vektor$w \in W$ är en tvådimensionell vektor.

   (e) Basbytesmatrisen som utför ett byte från basen A till basen B ges av den matris vars kolonner är koordinatvektorerna för B's basvektorer uttryckta i basen A.

5. Ange de av följande påståenden om egenvärden, egenvektorer och diagonalisering som är falska

   (a) En egenvektor till en kvadratisk matris A anger en riktning som inte ändras när vi låter A verka på den.

   (b) Egenvärdet talar om hur mycket en viss riktning ökar eller minskar i längd när matrisen verkar på den.

   (c) Diagonalisering ger en diagonal matris som har egenvektorerna som kolonner.

   (d) Om en 10×10 matris har 10 olika egenvärden så kan den diagonaliseras

   (e) För en symmetrisk matris kan egenrummet till ett egenvärde som har multipliciteten 1 ha ett tvådimensionellt egenrum.

6. Låt 3×3 matrisen A ha raderna betecknade med a_1, a_2, a_3. Antag att $\det A = 1$. Vilka av följande matriser har också determinant 1?

   (a)
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 - a_1 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

   (b)
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

   (c)
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

   (d)
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 - a_1 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

   (e)
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 - 3a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Frågorna 7-9 ger 3 poäng vardera

7. Är vektorerna $(1, 1, -2)$, $(2, -1, -1)$ $(-1, 2, 1)$ linjärt beroende eller oberoende.

8. Beräkna avståndet från punkten $p = (3, 1, -5)$ till delrummet W som spänns av $u = (1, 1, -3)$ och $v = (2, 1, 1)$

9. Bestäm de vektorer som uppfyller $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$, för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Uppgifterna 10 -14 kräver fullständiga och väl motiverade lösningar. Uppgifterna ger 5 poäng vardera

10. Beräkna baser för rad, kolonn och nollrum till följande matris

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

11. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad b = \begin{bmatrix} t \\ t+2 \\ 3t \end{bmatrix}$$

Bestäm de värden på t som gör systemet $Ax = b$ konsistent och lös systemet.

12. Beräkna det polynom på formen $y = ax + bx^3$ som bäst anpassar sig till punkterna

$$(-2, 1), (0, -1), (1, 1), (2, -1)$$

13. Låt $v_1, \ldots, v_4$ vara fyra stycken oberoende vektorer i $\mathbb{R}^5$. För att konkretisera så kan vi låta vektorerna vara de fyra raderna i följande matris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Verifiera att dessa radvektorer verkligen är oberoende och att de inte är ömsesidigt ortogonala. Förklara varför vektorerna är en bas för $W = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Vilken dimension har detta rum?

(b) Förklara hur Gram-Schmidts metod använder ovanstående vektorer för att beräkna en ON-bas för W. Speciellt: förklara **varför** denna ON-bas verkligen spänner upp samma sak som vektorerna v_i.

(observera att man **inte** behöver räkna ut denna ON-bas explicit)

14. Beskriv lösningarna till följande kvadratiska ekvation

$$-2x^2 - 4xy + y^2 + 4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 11$$

Dvs, diagonalisera dess kvadratiska form, utför sedan en kvadratkomplettering så att vi får ekvationen på formen,

$$a\mathbf{X}^2 + b\mathbf{Y}^2 = c$$

för några tal a, b och c.

Svar till tentamen i Linjär algebra, 2016 03 01.

1. b, c

2. c, d

3. b och d är inte ortogonal eftersom deras kolonnvektorer inte bildar en ORTONORMAL mängd.

4. b, e

5. c, e

6. a, c

7.

8. $\frac{10}{\sqrt{66}}$

9.

10.

11.

12.

13.

14.

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, 2016 03 01.

1. Att nollrummet är nolldimensionellt betyder att matrisen inte får en nollrad vid elimination och därför uppstår inga fria variabler. Vi har därför pivotelement i alla kolonner vilket innebär att rangen är n. Det följer också att determinanten i så fall är skild från noll. (varför påståendet i v är falskt). Pivotpositioner i alla kolonner ger också att ekvationssystemet $Ax = b$ är konsistent för alla högerled. Determinanten skilld från noll ger att matrisen är inverterbar. En matris har egenvärdet 0 om och endast om determinanten är noll, så påståendet e är falskt.

2. (a) Alla delrum är innehåller nollvektorn så skärningen/snittet mellan två delrum innehåller åtminstone nollvektorn och är alltså aldrig tomt.

(b) snittet är de vektorer som ligger i båda delrummen. Linjärkombinierar vi sådana vektorer så måste de ligga kvar i båda delrummen och således i snittet.

(c) Två två-dimensionella delrum i $\mathbb{R}^4$ kan skära i origo. Exempelvis $\text{Span}\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$ och $\text{Span}\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$. Vilket gör att denna är falsk.

(d) Om vi tar två olika räta linjer i $\mathbb{R}^2$, t.ex. x-axeln och y-axeln så är unionen just dessa axlar tillsammans. Detta är inte ett delrum eftersom när vi kombinerar en vektor på x-axeln men en på y-axeln så hamnar vi bort från axlarna.

(e) Här har vi $W \subset V \subset U$ och eftersom W är slutet under linjärkombinationer som del av V så måste det vara slutet även i U. Slutenheten innebär ju att när man kombinerar vektorerna så kan vi inte hamna utanför W varför en större omgivande mängd inte påverkar.

3. En matris är ortogonal definieras som att kolonnerna bildar en ortonormal mängd, dvs kolonnerna är ortogonala mot varandra och har dessutom längden 1. Matrisen B har kolonner som varken är ortogonala eller längden 1. Matrisen D har ortogonala kolonner men de är inte normerade utan har längden $\sqrt{2}$. De övriga matriserna är ortogonala matriser.

4. (a) Sant :: Detta antal vektorer i en bas är vad vi kallar för dimension.

(b) Falskt ::Här behöver vektorerna också vara oberoende för att bilda bas för rummet de spänner upp.

(c) Sant :: Här spänner ju vektorerna upp rummet och är oberoende så de bildar en bas.

(d) Sant :: Ett rum är tvådimensionellt betyder att det är två vektorer i en bas. När vi uttrycker vektorer i rummet mha av dessa två vektorer så får vi en koordinat för varje basvektor. Koordinatvektorn består därför av två komponenter och är alltså en tvådimensionell vektor.

(e) Falskt :: Bytet från A till B ges av en matris där A's basvektorer är uttryckta i basen B.

5. (a) Sant

(b) Sant

(c) Falskt :: den diagonala matrisen har **egenvärdena** på diagonalen och nollor i övrigt.

(d) Sant :: detta är en av diagonaliseringssatserna

(e) Falskt :: Om ett egenvärde har multipliciteten 1 så kan aldrig egenrummet bli tvådimensionellt, inte ens för symmetriska matriser. Däremot gäller att om multipliciteten är 2 för en ick-esymmetrisk matris så kan egenrummet bli endimensionellt. Det är det som händer när en matris inte är diagonaliserbar. Symmetriska matriser är alltid diagonaliserbara (t.o.m. ortogonalt diagonaliserbar) och för dessa matriser gäller att om multipliciteten för ett egenvärde är 2 så blir också motsvarande egenrum tvådimensionella.

6. (a) I denna uppgift har vi fått rad 2 genom att subtrahera rad 1 från rad 2, en vanlig radoperation som inte ändrar determinanten.

(b) Matrisen i b.) har raderna ett och tre ombytta. Determinanten blir därför -1

(c) Här har vi multiplicerat rad 2 med 2 vilket ger en volymsökning med två. Halvan framför dödar denna ökning så att determinanten blir den samma.

(d) I denna matris har rad 2 multiplicerats med 2 (vilket ger en faktor med två) och sedan har man subtraherat rad 1. Denna matris får determinanten 2.

(e) I denna matris har vi bara två av raderna med. Den mittersta raden är en linjärkombination av de två övriga raderna vilket gör att determinanten blir noll.

7. Man kan antingen ställa vektorerna som rader och eliminera. Om man får en nollrad så är de beroende annars oberoende.

Som rader:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Här får man alltså att vektorerna är oberoende.

Alternativt är att man använder sig av definitionen av oberoende/beroende och löser systemet $Ax = 0$, där A är matrisen som har våra vektorer som kolonner:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Detta system har alltså endast triviala lösningen vilket innebär att vektorerna är oberoende.

8. Projicera först på delrummet. Notera att $u \bullet v = 0$ vilket visar att vektorerna är ortogonala. Projektionen till delrummet ges då av summan av projektionerna till dessa två vektorer

$$\mathbf{proj}_W p = \frac{p \bullet u}{||u||^2} u + \frac{p \bullet v}{||v||^2} v = \frac{19}{11}(1, 1, -3) + \frac{1}{3}(2, 1, 1) = \frac{1}{33}(79, 68, -160)$$

Avståndet ges nu som längden av skillnadsvektorn

$$\mathbf{d} = p - \mathbf{proj}_W p = (3, 1, -5) - \frac{1}{33}(79, 68, -160) = \frac{1}{33}(20, -35, -5)$$

Längden av $\mathbf{d}$ som är vårt avstånd blir

$$\frac{\sqrt{1650}}{33} = \cdots = \frac{10}{\sqrt{66}}$$

Detaljerna för dessa räkningar blir ganska jobbiga. Färre räkningar blir det om man först beräknar normalvektor till delrumsplanet:

$$n = u \times v = (4, -7, -1)$$

Vektorn $\mathbf{d}$ fås nu som projektionen av p på normalvektorn:

$$\mathbf{d} = \mathbf{proj}_n p = \frac{p \bullet n}{||n||^2} n = \frac{10}{66}(4, -7, -1)$$

Avståndet blir nu $d = ||\mathbf{d}|| = \frac{10}{\sqrt{66}}$

9. Det kan vara till hjälp att associerar till egenvärden och egenvektorer. Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ innebär ju att 1 är ett egenvärde och $\mathbf{x}$ en egenvektor. Vi har att

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad (A - I)\mathbf{x} = 0$$

så vi ska lösa följande matrisekvation som vi därför direkt reducerar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

där vi poängterar att matrisen till vänster har matrisen $A - I$ i vänster led.

Vi får att $z = t$ är en fri variabel och att $x = -3/2t$ och $y = t$ så att lösningarna blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

10. Radreduktion ger

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De nollskillda raderna är en bas för radrummet. För kolonnrummet noterar vi att de ledande elementen står i rad 1 och 2. Detta gör att de två första kolonnerna i M är en bas för kolonnrummet. Nollrummets bas får vi mha den reducerade matrisen om vi lägger till nollor som höger led:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{6}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi får att $x$och y är ledande medan $z = s$ och $w = t$ är fria variabler. Vi får att Rad 1 ger att $x = -\frac{5}{7}s - \frac{6}{7}t$, rad 2 ger att $y = \frac{1}{7}s + \frac{4}{7}t$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{s}{7} + \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \frac{t}{7}$$

De två vektorerna i höger led blir bas för nollrummet.

11. Systemet på utvidgad matrisform blir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & t \\ 2 & 1 & -1 & t+2 \\ -1 & 1 & 2 & 3t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & t \\ 0 & -5 & -5 & 2-t \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4(2-t)}{5}+4t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & t \\ 0 & 1 & 1 & \frac{t-2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4(2-t)}{5}+4t \end{array}\right]$$

Konsistens har vi alltså om

$$\frac{4(2-t)}{5} + 4t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1/2.$$

Med detta värde så blir vår matris lika med

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

och genom att identifiera ledande och fria variabler så får vi lösningarna: $z = t(\text{ fri })$. De ledande uttryckta mha den fria: $x = z+1 = t+1$ och $y = -z-1/2 = -t-1/2$, vilket ger oss lösningen på parameterform:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

12. Punkterna insatt i polynomekvationen ger oss fyra ekvationer med koeffecienterna a, b som obekanta:

$$\begin{array}{rclll} (-2,1) & : & -2a-8b & =1 \\ (0,-1) & : & 0a-0b & =-1 \\ (1,1) & : & 1a+1b & =1 \\ (2,-1) & : & 2a+8b & =-1 \end{array}$$

som på matrisform kan skrivas

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vi ställer upp normalekvationen genom att multiplicera med A^T i båda led, vilket ger oss följande ekvation på matrisform:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 9 & 33 & -3 \\ 33 & 129 & -15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Detta ger oss att

$$y = 3x/2 - x^3/2$$

är det polynom som bäst anpassar sig till våra punkter, i minsta kvadratmening.

13. (a) För att visa oberoendet så Gauss-eliminerar vi matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Här ser vi att vi inte får en nollrad vilket betyder att våra radvektorer är oberoende. De är fyra oberoende som spänner upp W och är alltså en bas. Eftersom det är fyra vektorer i basen så är dimensionen fyra.

(b) Första vektorn är ju en av våra fyra vektorer så den ligger ju i W, kalla den b_1. För att beräkna den andra vektorn så tar vi en av de tre kvarvarande vektorerna v_2 och beräknar projektionen av denna på den första. Projektionen är en vektor som är parallell med den första och ligger därför i W. Den andra ON-bas vektor får vi nu genom att subtrahera projektionen från v_2. Eftersom båda vektorerna ligger i W så måste nu denna nya vektor också ligga i W eftersom den är en linjärkombination av vektorer i W. Tar vi en tredje vektor och subtraherar dess projektioner längs de nyss beräknade ortogonala vektorer så har vi linjärkombinerat vektorer i W och ligger därför kvar i W. Vi har nu tre ortogonala vektorer i W. Till sist tar vi den sista vektorn och subtraherar dess projektioner längs de tre ortogonala vektorerna och då har vi kombinerat fyra vektorer i W och ligger följdaktligen kvar i W. Vi har nu fyra ortogonala vektorer i W som då bildar bas för W eftersom de är oberoende och måste spänna upp det fyrdimensionella rummet

14. Börja med att ställa upp ekvationen på matrisform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{kvadratiska formen}} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 11$$

Att diagonalisera den kvadratiska formen innebär att diagonalisera formens matris Q. Eftersom denna är symmetrisk så kan vi hitta en ortogonal matris P som diagonaliserar matrisen. Matrisen P har egenvektorer som kolonner. Vi beräknar alltså egenvärden och egenvektorer till Q:

Karakteristiska ekvationen:

$$\det(Q - x) = \det \begin{bmatrix} -2- & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

Detta ger att egenvärdena blir $\lambda = 2$ och $\lambda = -3$. Vi beräknar motsvarande egenvektorer:

$\lambda = 2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som ger oss egenvektorerna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} t$$

$\lambda = -3$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som ger oss egenvektorerna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

De båda egenvektorerna är ortogonala och normerar vi dem så har vi kolonnerna till vår ortogonala matris:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nu utför vi det ortogonala koordinatbytet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Vår kvadratiska ekvation blir nu

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \underbrace{P^T Q P}_{=D} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \end{bmatrix} P}_{=B} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 11$$

Vi har

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 12 \end{bmatrix}$$

vilket ger att vår kvadratiska ekvation blir (mha kvadratkomplettering)

$$2X^2 - 3Y^2 - 4X + 12Y = 11 \quad \Leftrightarrow \quad 2(X^2 - 2X + 1) - 2 - 3(Y^2 - 4Y + 4) + 12 = 11$$

Vi får alltså att vår kvadratiska ekvation blir

$$2(X - 1)^2 - 3(Y - 2)^2 = 1$$

Sätt nu $\mathbf{X} = X - 1$ och $\mathbf{Y} = Y - 2$ så har vi

$$2\mathbf{X}^2 - 3\mathbf{Y}^2 = 1$$

som är en hyperbel.