

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

KRYSSA I SVARSFORMULÄRET DE PÅSTÅENDEN SOM ÄR SANNA.

1. Låt L vara en avbildning från ett vektorrum till ett annat vektorrum och låt x, y vara vektorer i vektorrummet och s, t reella tal.

Vad måste vara sant för att avbildningen ska vara linjär?

- (a) $L(x + y) = L(x) + L(y)$
- (b) $L(x \cdot y) = L(x) \cdot L(y)$
- (c) $L(sx \times ty) = sL(x) \times tL(y)$
- (d) $L(sx) = sL(x)$
- (e) $L\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{L(x)}{L(y)}$

2. Denna uppgift handlar om de tre vektorerna

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ange de påståenden som är sanna.

- (a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ är linjärt oberoende
 - (b) $\{v_1, v_2\}$ är linjärt oberoende.
 - (c) $\{v_1, v_3\}$ är linjärt oberoende
 - (d) $\{v_2, v_3\}$ är linjärt oberoende
 - (e) $\{v_2, v_1\}$ är linjärt oberoende
3. Vilka påståenden är sanna för en ortogonal matris P
- (a) Raderna i matrisen P är ömsesidigt ortogonala och har längden 1.
 - (b) Kolonnerna i matrisen P är ortogonala mot raderna i P
 - (c) $\det P = 0$
 - (d) P är symmetrisk.
 - (e) Kolonnerna i matrisen P är ömsesidigt ortogonala och har längden 1.

4. Denna uppgift handlar om följande matris och dess radreducerade form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_B$$

Ange de påståenden som är sanna

- (a) A 's rader är linjärt oberoende
- (b) De två första kolonnerna i B är en bas för A 's kolonnrum.
- (c) A 's nollrum är tvådimensionellt
- (d) A 's kolonnrum är lika med B 's kolonnrum
- (e) A 's radrum spänns upp av B 's rader.

5. I denna uppgift så är V ett vektorrum med addition "+" och multiplikation med skalär ".". Låt \mathbf{x} och \mathbf{y} vara två vektorer i V och s och t två reella tal.

Ange de operationer på \mathbf{x} , \mathbf{y} , s och t som är tillåtna.

- (a) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$
- (b) $s \cdot \mathbf{x}/\mathbf{y}$
- (c) $s \cdot \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{y}$
- (d) $(\sin s) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})$
- (e) $s \cdot \sin(\mathbf{x}) + t \cdot \cos(\mathbf{y})$

6. Denna uppgift handlar om skalärprodukten $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ av två vektorer i \mathbb{R}^3

Ange vilka av följande påståenden som är sanna.

- (a) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ är en vektor som är vinkelrät mot både \mathbf{u} och \mathbf{v}
- (b) $\sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}$ ger oss längden av \mathbf{u} .
- (c) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ ger oss avståndet mellan \mathbf{u} och \mathbf{v} .
- (d) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ ger oss arean av det parallelogram som \mathbf{u} och \mathbf{v} spänner upp.
- (e) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ hjälper oss att beräkna vinkeln mellan \mathbf{u} och \mathbf{v} .

FRÅGORNA 7-9 GER 3 POÄNG VARDERA

7. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned}2x + y + z &= 2 \\x + 3y - 2z &= 1 \\3x + 3y &= 3\end{aligned}\tag{1}$$

8. Denna uppgift handlar om den linjära avbildning $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som först speglar i x -axeln, sedan roterar med 90° och till sist speglar i y -axeln.

- (a) Beräkna matrisen för avbildningen L .
- (b) Vilken geometrisk operation (rotation, spegling) svarar L mot?

9. Den här uppgiften handlar om den kvadratiska formen

$$3x^2 - 2xy + 3y^2$$

- (a) Skriv den kvadratiska formen på matrisform.
- (b) Beräkna en ortogonal basbytesmatris som diagonaliserar den kvadratiska formen.

UPPGIFTERNA 10 -14 KRÄVER FULLSTÄNDIGA OCH VÄL MOTIVERADE LÖSNINGAR.
UPPGIFTERNA GER 5 POÄNG VARDERA

10. Denna uppgift handlar om matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

- (a) Beräkna bas för M 's radrum
- (b) Beräkna bas för M 's kolonnrum
- (c) Beräkna bas för M 's nollrum.

11. Ett plan går genom origo samt genom punkterna $p_1 = (1, 1, 0)$ och $p_2 = (0, 1, 1)$.

- (a) Beräkna ekvationen för detta plan.
- (b) Visa att planet är ett delrum till \mathbb{R}^3
- (c) Ligger punkten $q = (1, 0, 1)$ ligger i detta delrum?

12. Den här uppgiften handlar om funktioner på formen $f(x) = a + b \cdot 2^x$ och mätdata

$$(0, -1), (1, -1), (2, 0), (3, 3)$$

- (a) Ange det system som punkterna ger om de uppfyller funktionsdefinitionen
- (b) Ange den funktion som i minsta kvadratmening bäst anpassar sig till mätdata.

13. I denna uppgift har vi en linjär avbildning L från \mathbb{R}^3 till \mathbb{R}^3 där det är givet hur avbildningen verkar på standardbasvektorerna:

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Skriv upp L 's matris M m.a.p. standardbasen.
- (b) Vad gäller allmänt för att ekvationen $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ska ha lösningar? Förklara hur \mathbf{b} måste förhålla sig till matrisen M .
- (c) Ge ett villkor på a, b och c som gör att ekvationen

$$M\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{där} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

är konsistent.

14. Beräkna en matris som ortogonalt diagonaliserar matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Svar till tentamen i Linjär Algebra, 2016 03 31.

1. a och d

2. c och d

3. a och e

4. c och e

5. c och d

6. b och e

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra, 2016 03 31.

1. a och d
2. c och d
3. a och e
4. c och e
5. c och d
6. b och e
7. Ställ upp systemet på matrisform och radreducera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Identifiera ledande och fria variabler, uttrycka de ledande mha de fria och skriv upp detta på parameterform:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. L 's matris ges av matrisprodukten

$$S_y R_{90^\circ} S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uppenbarligen så är resultat lika med rotation med 90° .

9. (a) Matrisformen blir

$$[x \ y] \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{=Q} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- (b) Basbytesmatrisen som söks är den matris som ortogonalt diagonaliserar matrisen Q

Eigenvärden :: Vi löser $\det(Q - \lambda I) = 0$:

$$\det(Q - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \pm 1$$

Eigenvärdena är alltså $\lambda = 2$ och $\lambda = 4$

Egenvektorer :: Vi löser $(Q - \lambda I)x = 0$ för våra eigenvärden

$\lambda = 2$::

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \Rightarrow e_{\lambda=2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 4$::

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t \Rightarrow e_{\lambda=4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ON-bas för egenrummen :: Som ses i ovan så har vi två stycken endimensionella egenrum som är ortogonala mot varandra. Vi behöver bara normera vektorerna vilket redan är gjort i ovan.

Ortogonalt diagonaliserande matris :: Detta är matrisen som har våra normaliserade egenvektorer som kolonner:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10.

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De tre nollskilda raderna i reducerade matrisen är bas för radrummet

Eftersom de ledande ettorna står i kolonn 1, 3 och 5 så är dessa kolonner i M en bas för kolonnrummet.

Nollrummet får vi genom att lösa $Mx = 0$. Ovanstående räkningar ger att detta system reduceras till

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Om kallar variablerna för x_1, \dots, x_5 så har vi att $x_2 = s$ och $x_4 = t$ är fria variabler (eftersom deras kolonner saknar ledande etta). Vi löser ut de övriga variablerna mha de fria:

$$\begin{array}{ll} \text{Rad ett ger} & x_1 = 2x_2 - x_4 = 2s - t \\ \text{Rad två ger} & x_3 = 2x_4 = 2t \\ \text{Rad tre ger} & x_5 = 0 \end{array}$$

Lösningarna blir nu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

De två vektorerna i höger led bildar bas för nollrummet.

11. (a) För att bestämma planets ekvation

$$ax + by + cz = d$$

så behöver vi en normalvektor och en punkt i planet. Eftersom origo ligger i planet så måste

$$d = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$$

Normalvektor beräknar vi genom kryssprodukten. Eftersom origo och de båda punkterna ligger i planet så kommer vektorerna $p_1 = (1, 1, 0)$ och $p_2 = (0, 1, 1)$ ligga i planet. Kryssprodukten av dessa ger oss vår normalvektor:

$$n = (a, b, c) = p_1 \times p_2 = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (1, -1, 1)$$

Ekvationen för vårt plan blir således

$$x - y + z = 0$$

Vi kan kontrollera att våra tre punkter uppfyller denna ekvation, vilket de gör.

- (b) Är planet ett delrum? Det ska ju vara det eftersom planet går genom origo. För att visa detta så använder vi delrumsaxiomen. Vi behöver visa att

origo ligger i planet :: Sätter vi in origo i planets ekvation så ser vi att den är uppfylld.

Planet slutet under addition :: Låt $U = (x_1, y_1, z_1)$ och $V = (x_2, y_2, z_2)$ vara två vektorer i planet (som alltså uppfyller planets ekvation). Vi behöver nu visa att summan av vektorerna $U + V = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ ligger i planet. Detta gör vi genom att sätta in i vänster led av planets ekvation:

$$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = \underbrace{x_1 - y_1 + z_1}_{=0} + \underbrace{x_2 - y_2 + z_2}_{=0} = 0 + 0 = 0$$

Vänster led blir alltså noll och eftersom höger led är noll så är planets ekvation uppfylld och planet är slutet under addition.

Planet slutet under multiplikation med skalär :: Vi behöver visa att om U ligger i planet så ligger $t \cdot U$ i planet. Vi sätter in $t \cdot U = (tx_1, ty_1, tz_1)$ i planets vänster led:

$$tx_1 - ty_1 + tz_1 = t \cdot (x_1 - y_1 + z_1) = t \cdot 0 = 0$$

Delrumsaxiomen är alltså uppfyllda och vi kan därför säga att vårt plan verkligen är ett delrum av \mathbb{R}^3 .

- (c) Punkten $q = (1, 0, 1)$ ligger i delrummet/planet precis om punkten uppfyller planets ekvation. Vi sätter in punktens x , y och z koordinater i vänster led och ser om vi får noll:

$$1 - 0 + 1 = 2$$

Vänster led blir alltså noll medan höger led är noll. Detta visar att q inte ligger i vårt plan/delrum.

12. (a) Punkternas x och y koordinater insatt i $a + b \cdot 2^x = y$ ger oss ekvationssystemet:

$$\begin{array}{rcl} a + b \cdot 2^0 & = & -1 \\ a + b \cdot 2^1 & = & -1 \\ a + b \cdot 2^2 & = & 0 \\ a + b \cdot 2^3 & = & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} a + b & = & -1 \\ a + 2b & = & -1 \\ a + 4b & = & 0 \\ a + 8b & = & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- (b) Om vi börjar med ovanstående matrisekvation, där vi söker a och b så multiplicerar vi denna med högerledsmatrisens transponat i båda led:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

som ger oss matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 15 & 85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Elimination ger

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 15 & 1 \\ 15 & 85 & 21 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array} \right]$$

Detta ger alltså att $a = -2$ och $b = 3/5 = 0.6$ som ger att vår minstakvadratanpassade funktion blir

$$f(x) = -2 + 0.6 \cdot 2^x$$

13. (a) Matrisen till L m.a.p. standardbasen ges av dess verkan på standardbasvektorerna. Detta är givet i uppgiften så matrisen blir

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

där vi noterar att kolonnerna fås från hur L verkar på standardbasen.

- (b) För att ekvationen $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ska vara konsistent så måste högerledsvektorn ligga i spannet av matrisens kolonner, dvs \mathbf{b} måste ligga i kolonnrummet till B .
- (c) Vi ska nu bestämma a, b och c så att systemet $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är konsistent. Vi ställer upp på matrisform och radreducerar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & 0 & b - 2a \\ 0 & 0 & 0 & a - b + c \end{array} \right]$$

Från detta har vi att om systemet är konsistent om och endast om $a - b + c = 0$.

14. **Beräkna egenvärden ::** Vi har att karakteristiska ekvationen blir

$$0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 1)$$

Gissning på nollställen ger att $\lambda = 1$ och $\lambda = -2$ är egenvärden. Genom att sätta in i $A - \lambda I$ så ser man att då $\lambda = -2$ så får vi en matris med tre lika rader vilket ger två nollrader vid elimination och detta ger oss att egenrummet för detta egenvärde är tvådimensionellt. Eftersom vår matris A är symmetrisk så betyder denna tvådimensionallitet att $\lambda = -2$ är ett dubbelt egenvärde, vilket motiverar ovanstående faktorisering. Annars så kan man utföra polynomdivisionen $(-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4)/(\lambda + 2)(\lambda - 1)$:

Här följer polynomdivisionen, där vi använder x istället för λ för att få den automatiska divisionen att fungera.

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ x^2 + x - 2 - x^3 - 3x^2 + 4 \\ \hline x^3 + x^2 - 2x \\ - 2x^2 - 2x + 4 \\ 2x^2 + 2x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

- Beräkna egenvektorer ::** Vi löser $(A - \lambda I)x = 0$ för våra egenvärden

$\lambda = 1$:: Vi löser systemet

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som ger oss egenvektorerna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$\lambda = -2$:: Vi löser systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Här har vi två fria variabler, $y = s$ och $z = t$ och vi får att egenrummet kan skrivas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=v_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=v_2} t$$

Vi noterar att de båda vektorerna är ortogonala mot förra egenrummet men att de inte är ortogonala mot varandra, vilket vi måste åtgärda i nästa steg.

ON-bas för varje egenrum Vi beräknar nu ON-bas för varje egenrum för sig.

$\lambda = 1$:: Här behöver vi bara normera vår egenvektor:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -2$:: Här måste vi använda Gram-Schmidts metod:

$$b_1 = v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = v_2 - \mathbf{proj}_{b_1} v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En kontroll ger att b_1 och b_2 är ortogonala. Normering av b_1 och b_2 ger oss en ON-bas för detta egenrum:

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Konstruera den ortogonala matrisen :: Den ortogonala matris som diagonaliserar A ges nu av matrisen som har de tre enhetsvektorerna som vi konstruerade i föregående steg. Vi har

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$