HÖGSKOLAN
I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg, 0734-41 23 31
Rolf Källström, 070-622 93 09

Lärarprogram, ingenjörsprogram
och distansstudenter

LINJÄR ALGEBRA
mag041
2016 03 31

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

KRYSSA I SVARSFORMULÄRET DE PÅSTÅENDEN SOM ÄR SANNA.

1. Låt L vara en avbildning från ett vektorrum till ett annat vektorrum och låt x, y vara vektorer i vektorrumet och s, t reella tal.
   Vad måste vara sant för att avbildningen ska vara linjär?
   (a) $L(x + y) = L(x) + L(y)$
   (b) $L(x \cdot y) = L(x) \cdot L(y)$
   (c) $L(sx \times ty) = sL(x) \times tL(y)$
   (d) $L(sx) = sL(x)$
   (e) $L(\frac{x}{y}) = \frac{L(x)}{L(y)}$

2. Denna uppgift handlar om de tre vektorerna
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
   Ange de påståenden som är sanna.
   (a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ är linjärt oberoende
   (b) $\{v_1, v_2\}$ är linjärt oberoende.
   (c) $\{v_1, v_3\}$ är linjärt oberoende
   (d) $\{v_2, v_3\}$ är linjärt oberoende
   (e) $\{v_2, v_1\}$ är linjärt oberoende

3. Vilka påståenden är sanna för en ortogonal matris P
   (a) Raderna i matrisen P är ömsesidigt ortogonala och har längden 1.
   (b) Kolonnerna i matrisen P är ortogonala mot raderna i P
   (c) $\det P = 0$
   (d) P är symmetrisk.
   (e) Kolonnerna i matrisen P är ömsesidigt ortogonala och har längden 1.

4. Denna uppgift handlar om följande matris och dess radreducerade form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

Ange de påståenden som är sanna

(a) A's rader är linjärt oberoende

(b) De två första kolonnerna i B är en bas för A's kolonnrum.

(c) A's nollrum är tvådimensionellt

(d) A's kolonnrum är lika med B's kolonnrum

(e) A's radrum spänns upp av B's rader.

5. I denna uppgift så är V ett vektorrum med addition "$+$" och multiplikation med skalär "$\cdot$". Låt $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ vara två vektorer i V och s och t två reella tal.

Ange de operationer på $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, s och t som är tillåtna.

(a) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

(b) $s \cdot \mathbf{x}/\mathbf{y}$

(c) $s \cdot \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{y}$

(d) $(\sin s) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})$

(e) $s \cdot \sin(\mathbf{x}) + t \cdot \cos(\mathbf{y})$

6. Denna uppgift handlar om skalärprodukten $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ av två vektorer i $\mathbb{R}^3$
Ange vilka av följande påståenden som är sanna.

(a) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ är en vektor som är vinkelrät mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$

(b) $\sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}}$ ger oss längden av $\mathbf{u}$.

(c) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ ger oss avståndet mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

(d) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ ger oss arean av det parallellogram som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp.

(e) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ hjälper oss att beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Frågorna 7-9 ger 3 poäng vardera

7. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ x + 3y - 2z &= 1 \\ 3x + 3y &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

8. Denna uppgift handlar om den linjära avbildning $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som först speglar i x-axeln, sedan roterar med 90° och till sist speglar i y-axeln.

   (a) Beräkna matrisen för avbildningen L.

   (b) Vilken geometrisk operation (rotation, spegling) svarar L mot?

9. Den här uppgiften handlar om den kvadratiska formen

$$3x^2 - 2xy + 3y^2$$

   (a) Skriv den kvadratiska formen på matrisform.

   (b) Beräkna en ortogonal basbytesmatris som diagonaliserar den kvadratiska formen.

Uppgifterna 10 -14 kräver fullständiga och väl motiverade lösningar. Uppgifterna ger 5 poäng vardera

10. Denna uppgift handlar om matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

   (a) Beräkna bas för M's radrum

   (b) Beräkna bas för M's kolonnrum

   (c) Beräkna bas för M's nollrum.

11. Ett plan går genom origo samt genom punkterna $p_1 = (1, 1, 0)$ och $p_2 = (0, 1, 1)$.

   (a) Beräkna ekvationen för detta plan.

   (b) Visa att planet är ett delrum till $\mathbb{R}^3$

   (c) Ligger punkten $q = (1, 0, 1)$ ligger i detta delrum?

12. Den här uppgiften handlar om funktioner på formen $f(x) = a + b \cdot 2^x$ och mätdata

$$(0, -1), (1, -1), (2, 0), (3, 3)$$

   (a) Ange det system som punkterna ger om de uppfyller funktionsdefinitionen

   (b) Ange den funktion som i minsta kvadratmening bäst anpassar sig till mätdata.

13. I denna uppgift har vi en linjär avbildning L från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ där det är givet hur avbildningen verkar på standardbasvektorerna:

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Skriv upp L's matris M m.a.p. standardbasen.

   (b) Vad gäller allmänt för att ekvationen $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ska ha lösningar? Förklara hur $\mathbf{b}$ måste förhålla sig till matrisen M.

   (c) Ge ett villkor på a, b och c som gör att ekvationen

$$M\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{där} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

   är konsistent.

14. Beräkna en matris som ortogonalt diagonaliserar matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Svar till tentamen i Linjär Algebra, 2016 03 31.

1. a och d
2. c och d
3. a och e
4. c och e
5. c och d
6. b och e
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.

Lösningar till tentamen i Linjär Algebra, 2016 03 31.

1. a och d

2. c och d

3. a och e

4. c och e

5. c och d

6. b och e

7. Ställ upp systemet på matrisform och radreducera:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Identifiera ledande och fria variabler, uttrycka de ledande mha de fria och skriva upp detta på parameterform:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. L's matris ges av matrisprodukten

$$S_y R_{90^\circ} S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uppenbarligen så är resultat lika med rotation med 90°.

9. (a) Matrisformen blir

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{=Q} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(b) Basbytesmatrisen som söks är den matris som ortogonalt diagonaliserar matrisen Q

Egenvärden :: Vi löser $\det(Q - \lambda I) = 0$:

$$\det(Q - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3 \pm 1$$

Egenvärdena är alltså $\lambda = 2$ och $\lambda = 4$

Egenvektorer :: Vi löser $(Q - \lambda I)x = 0$ för våra egenvärden

$\lambda = 2$ ::

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad \Rightarrow \quad e_{\lambda=2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 4$ ::

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad \Rightarrow \quad e_{\lambda=2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ON-bas för egenrummen :: Som ses i ovan så har vi två stycken endimensionella egenrum som är ortogonala mot varandra. Vi behöver bara normera vektorerna vilket redan är gjort i ovan.

Ortogonalt diagonaliserande matris :: Detta är matrisen som har våra normaliserade egenvektorer som kolonner:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10.

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De tre nollskilda raderna i reducerade matrisen är bas för radrummet

Eftersom de ledande ettorna står i kolonn 1, 3 och 5 så är dessa kolonner i M en bas för kolonnrummet.

Nollrummet får vi genom att lösa $Mx = 0$. Ovanstående räkningar ger att detta system reduceras till

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Om kallar variablerna för $x_1, \ldots, x_5$ så har vi att $x_2 = s$ och $x_4 = t$ är fria variabler (eftersom deras kolonner saknar ledande etta). Vi löser ut de övriga variablerna mha de fria:

$$\begin{array}{ll} \text{Rad ett ger} & x_1 = 2x_2 - x_4 = 2s - t \\ \text{Rad två ger} & x_3 = 2x_4 = 2t \\ \text{Rad tre ger} & x_5 = 0 \end{array}$$

Lösningarna blir nu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

De två vektorerna i höger led bildar bas för nollrummet.

11. (a) För att bestämma planets ekvation

$$ax + by + cz = d$$

så behöver vi en normalvektor och en punkt i planet. Eftersom origo ligger i planet så måste

$$d = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$$

Normalvektor beräknar vi genom kryssprodukten. Eftersom origo och de båda punkterna ligger i planet så kommer vektorerna $p_1 = (1, 1, 0)$ och $p_2 = (0, 1, 1)$ ligga i planet. Kryssprodukten av dessa ger oss vår normalvektor:

$$n = (a, b, c) = p_1 \times p_2 = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (1, -1, 1)$$

Ekvationen för vårt plan blir således

$$x - y + z = 0$$

Vi kan kontrollera att våra tre punkter uppfyller denna ekvation, vilket de gör.

(b) Är planet ett delrum? Det ska ju vara det eftersom planet går genom origo. För att visa detta så använder vi delrumsaxiomen. Vi behöver visa att

origo ligger i planet :: Sätter vi in origo i planets ekvation så ser vi att den är uppfylld.

Planet slutet under addition :: Låt $U = (x_1, y_1, z_1)$ och $V = (x_2, y_2, z_2)$ vara två vektorer i planet (som alltså uppfyller planets ekvation). Vi behöver nu visa att summan av vektorerna $U + V = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ ligger i planet. Detta gör vi genom att sätta in i vänster led av planets ekvation:

$$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = \underbrace{x_1 - y_1 + z_1}_{=0} + \underbrace{x_2 - y_2 + z_2}_{=0} = 0 + 0 = 0$$

Vänster led blir alltså noll och eftersom höger led är noll så är planets ekvation uppfylld och planet är slutet under addition.

Planet slutet under multiplikation med skalär :: Vi behöver visa att om U ligger i planet så ligger $t \cdot U$ i planet. Vi sätter in $t \cdot U = (tx_1, ty_1, tz_1)$ i planets vänster led:

$$tx_1 - ty_1 + tz_1 = t \cdot (x_1 - y_1 + z_1) = t \cdot 0 = 0$$

Delrumsaxiomen är alltså uppfyllda och vi kan därför säga att vårt plan verkligen är ett delrum av $\mathbb{R}^3$.

(c) Punkten $q = (1, 0, 1)$ ligger i delrummet/planet precis om punkten uppfyller planets ekvation. Vi sätter in punktens x, y och z koordinater i vänster led och ser om vi får noll:

$$1 - 0 + 1 = 2$$

Vänster led blir alltså noll medan höger led är noll. Detta visar att q inte ligger i vårt plan/delrum.

12. (a) Punkternas x och y koordinater insatt i $a + b \cdot 2^x = y$ ger oss ekvationssystemet:

$$\begin{array}{rcr} a + b \cdot 2^0 & = & -1 \\ a + b \cdot 2^1 & = & -1 \\ a + b \cdot 2^2 & = & 0 \\ a + b \cdot 2^3 & = & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcr} a + b & = & -1 \\ a + 2b & = & -1 \\ a + 4b & = & 0 \\ a + 8b & = & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(b) Om vi börjar med ovanstående matrisekvation, där vi söker a och b så multiplicerar vi denna med högerledsmatrisens transponat i båda led:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

som ger oss matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 15 & 85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Elimination ger

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 15 & 1 \\ 15 & 85 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right]$$

Detta ger alltså att $a = -2$ och $b = 3/5 = 0.6$ som ger att vår minstakvadratanpassade funktion blir

$$f(x) = -2 + 0.6 \cdot 2^x$$

13. (a) Matrisen till L m.a.p. standardbasen ges av dess verkan på standardbasvektorerna. Detta är givet i uppgiften så matrisen blir

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

där vi noterar att kolonnerna fås från hur L verkar på standardbasen.

(b) För att ekvationen $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ska vara konsistent så måste högerledsvektorn ligga i spannet av matrisens kolonner, dvs $\mathbf{b}$ måste ligga i kolonnrummet till B.

(c) Vi ska nu bestämma a, b och c så att systemet $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är konsistent. Vi ställer upp på matrisform och radreducerar:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array}\right]$$

Från detta har vi att om systemet är konsistent om och endast om $a - b + c = 0$.

14. Beräkna egenvärden :: Vi har att karakteristiska ekvationen blir

$$0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 1)$$

Gissning på nollställen ger att $\lambda = 1$ och $\lambda = -2$ är egenvärden. Genom att sätta in i $A - \lambda I$ så ser man att då $\lambda = -2$ så får vi en matris med tre lika dana rader vilket ger två nollrader vid elimination och detta ger oss att egenrummet för detta egenvärde är tvådimensionellt. Eftersom vår matris A är symmetrisk så betyder denna tvådimensionallitet att $\lambda = -2$ är ett dubbelt egenvärde, vilket motiverar ovanstående faktorisering. Annars så kan man utföra polynomdivisionen $(-\lambda^3 - 3\lambda + 4)/(\lambda + 2)(\lambda - 1)$:

Här följer polynomdivisionen, där vi använder x istället för λ för att få den automatiska divisionen att fungera.

$$\begin{array}{r|l} & -x-2 \\ \hline x^2+x-2 & -x^3-3x^2 \qquad +4 \\ & \;\; x^3+x^2-2x \\ \hline & -2x^2-2x+4 \\ & 2x^2+2x-4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Beräkna egenvektorer :: Vi löser $(A - \lambda I)x = 0$ för våra egenvärden

$\lambda = 1$ **::** Vi löser systemet

$$\left[\begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som ger oss egenvektorerna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$\lambda = -2$ **::** Vi löser systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Här har vi två fria variabler, $y = s$ och $z = t$ och vi får att egenrummet kan skrivas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=v_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=v_2} t$$

Vi noterar att de båda vektorerna är ortogonala mot förra egenrummet men att de inte är ortogonala mot varandra, vilket vi måste åtgärda i nästa steg.

ON-bas för varje egenrum Vi beräknar nu ON-bas för varje egenrum för sig.

$\lambda = 1$ **::** Här behöver vi bara normera vår egenvektor:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -2$ **::** Här måste vi använda Gram-Schmidts metod:

$$b_1 = v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = v_2 - \mathbf{proj}_{b_1} v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En kontroll ger att b_1 och b_2 är ortogonala. Normering av b_1 och b_2 ger oss en ON-bas för detta egenrum:

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Konstruera den ortogonala matrisen :: Den ortogonala matris som diagonaliserar A ges nu av matrisen som har de tre enhetsvektorererna som vi konstruerade i föregående steg. Vi har

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$